Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+20

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 9

37. Sei E ein reeller Banachraum, E_+ ein abgeschlossener Kegel in E und $x \in E$. Zeige, dass x genau dann in E_+ liegt, wenn $\varphi(x) \geq 0$ für jedes bezüglich E_+ positive Funktional $\varphi \in E'$ gilt, vgl. Aufgabe 25. (2)

Lösung: Ist $x \in E_+$, so gilt $\varphi(x) \geq 0$ für alle positiven φ nach Definition.

Sei nun $x \notin E_+$. Weil E_+ abgeschlossen und konvex ist, gibt es nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach ein $\varphi \in E'$ mit $\varphi(y) > \varphi(x)$ für alle $y \in E_+$. Es kann kein $y \in E_+$ mit $\varphi(y) < 0$ geben, da sonst $\varphi(x) < \varphi(ny) = n\varphi(y) \to -\infty$ folgen würde, ein Widerspruch. Also ist φ positiv. Zudem folgt aus $0 \in E_+$ auch $\varphi(x) < 0$ nach Wahl von φ. Also gibt es ein positives Funktional φ, für das nicht $\varphi(x) \geq 0$ gilt.

38. Sei X ein Banachraum und (x_n) eine Folge in X, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert. Zeige, dass es dann Konvexkombinationen $y_n \coloneqq \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,k} x_k$ gibt, d.h. $\lambda_{n,k} \geq 0$ und $\sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,k} = 1$, für die $y_n \to x$ gilt. (2)
Tipp: Betrachte $C \coloneqq \overline{\operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Lösung: Man sieht leicht, dass der Abschluss einer konvexen Menge konvex ist. Also ist die Menge C abgeschlossen und konvex, also auch schwach (folgen-)abgeschlossen, wie man beispielsweise aus Aufgabe 29 schlussfolgern kann. Wegen $x_n \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt dann $x \in C$. Das bedeutet, dass es eine Folge $(y_n) \subset \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $y_n \to x$ gibt, was gerade die Behauptung ist.

Bemerkung: Im Allgemeinen kann man nicht $y_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_{n_k}$ für eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) wählen, siehe den Artikel „Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz" von J. Schreier aus dem Jahr 1930.

39. Sei (M, d) ein metrischer Raum und X ein Banachraum. Bezeichne $F(M, X)$ die Menge aller Funktionen von M nach X. Eine Menge $A \subset F(M, X)$ heißt *gleichstetig*, falls es zu jedem $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit dem $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ für alle $f \in A$ und $y \in B(x, \delta)$ gilt. Zeige:

(a) Ist M kompakt, so ist M separabel. (2)

Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{x \in M} B(x, \frac{1}{n})$ eine offene Überdeckung von M, besitzt wegen Kompaktheit also eine endliche Teilüberdeckung mit Mittelpunkten $x_{n,k}$. Die abzählbare Menge $D \coloneqq \{x_{n,k}\}$ ist dann dicht in M. Sei nämlich $y \in M$ und $\varepsilon > 0$. Wähle n mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Nach Konstruktion gibt es k mit $y \in B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$, was $x_{n,k} \in B(y, \varepsilon)$, also $B(y, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$, zeigt.

(b) Sei (f_n) eine Folge in $F(M, X)$ und sei $N \subset M$ abzählbar. Falls die Mengen $B_x \coloneqq \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ für jedes $x \in N$ relativ kompakt sind (d.h. $\overline{B}_x$ ist kompakt), so gibt es eine Teilfolge von (f_n), die auf N punktweise konvergiert. (2)

Lösung: Sei $N = \{x_k\}$. Wir wählen sukzessive Teilfolgen von (f_n), für die $(f_n(x_k))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, was wegen relativer Kompaktheit von B_{x_k} möglich ist. Die Diagonalfolge konvergiert dann in jedem x_k, also punktweise auf N, vergleiche auch den Beweis des Diagonalfolgenarguments in der Vorlesung.

(c) Ist $(f_n) \subset F(M,X)$ gleichstetig und punktweise konvergent auf einer Menge $N \subset M$, so konvergiert (f_n) gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\overline{N}$. (2)
Hinweis: Es darf benutzt werden, dass für kompaktes K der Raum $\mathrm{C}(K,X)$ der stetigen Funtionen von K nach X bezüglich der Supremumsnorm vollständig ist.

Lösung: Sei $K \subset \overline{N}$ kompakt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x \in K$ gibt es ein $\delta_x > 0$ mit $\|f_n(x) - f_n(y)\| \le \frac{\varepsilon}{5}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $y \in B(x,\delta_x)$. Wegen Kompaktheit gibt es dann eine endliche Menge $E \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{x\in E} B(x,\delta_x)$. Zu jedem $x \in E$ gibt es wegen $x \in \overline{N}$ ein $z_x \in B(x,\delta_x) \cap N$ und nach Voraussetzung konvergiert $(f_n(z_x))$. Da E endlich ist, gibt es also n_0 mit $\|f_n(z_x) - f_m(z_x)\| \le \frac{\varepsilon}{5}$ für alle $x \in E$.
Sei nun $y \in K$ beliebig. Dann gibt es $x \in E$ mit $y \in B(x,\delta_x)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\|f_n(y) - f_m(y)\| &\le \|f_n(y) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(z_x)\| \\
&\qquad + \|f_n(z_x) - f_m(z_x)\| + \|f_m(z_x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(y)\| \\
&\le \varepsilon
\end{aligned}
$$

für $m,n \ge n_0$. Somit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf K eine Cauchyfolge in $\mathrm{C}(K,X)$ und somit konvergent, was gerade die Behauptung war.

(d) Sei M kompakt. Eine Menge $A \subset \mathrm{C}(M,X)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichstetig ist und $\{f(x) : f \in A\}$ für alle $x \in M$ relativ kompakt ist. (2)

Lösung: Sei N eine abzählbare, dichte Teilmenge von M. Sei A gleichstetig und (f_n) eine Folge in A. Dann ist (f_n) gleichstetig und $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \subset \{f(x) : f \in A\}$ für alle $x \in N$ relativ kompakt. Kombiniert man die vorigen beiden Aufgabenteile, erhält man, dass eine Teilfolge von (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge von $M = \overline{N}$ gleichmäßig konvergiert, also auch auf M selbst. Somit gibt es $f \in \overline{A}$ mit $f_{n_k} \to f$ in $\mathrm{C}(M,X)$. Dies zeigt die relative Kompaktheit von A: Für jede Folge (g_n) in $\overline{A}$ gibt es eine Folge (f_n) in A mit $\|g_n - f_n\|_\infty \le \frac{1}{n}$. Wähle eine Teilfolge mit $f_{n_k} \to f \in \overline{A}$. Dann gilt auch $g_{n_k} \to f$. Wir haben also die (Folgen-)Kompaktheit von $\overline{A}$ gezeigt.
Sei nun A relativ kompakt und $x \in M$ beliebig. Da die Abbildung $f \mapsto f(x)$ stetig ist, ist $\{f(x) : f \in \overline{A}\}$ als Bild einer kompakten Menge kompakt in X, was die relative Kompaktheit von $\{f(x) : f \in A\}$ zeigt. Für die Gleichstetigkeit sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und E eine endliche Teilmenge von $\overline{A}$ mit $\overline{A} \subset \bigcup_{f\in E} B(f, \frac{\varepsilon}{3})$. Zu jedem $f \in E$ gibt es ein $\delta_f > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\| \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in B(x,\delta_f)$. Setze $\delta := \min_{f\in E} \delta_f > 0$. Sei $g \in A$ beliebig. Dann gibt es $f \in E$ mit $g \in B(f, \frac{\varepsilon}{3})$, und es gilt

$$\|g(x) - g(y)\| \le \|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f(y) - g(y)\| \le \varepsilon$$

für alle $y \in B(x,\delta) \subset B(x,\delta_f)$. Das zeigt die gleichgradige Stetigkeit.
Bemerkung: Eine ähnliche Aussage wie in dieser Teilaufgabe bleibt auch richtig, wenn M nur ein kompakter topologischer Raum ist. Wenn M nicht separabel ist, muss man den Beweis allerdings ein wenig modifizieren.

40. Seien E und F Banachräume und $T\colon E \to F$ linear. Untersuche (Beweis oder Gegenbeispiel), welche Implikationen zwischen den folgenden Aussagen über T gelten: (2)

(i) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$
(ii) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$
(iii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx$
(iv) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$

Lösung: Wir zeigen, dass (i), (ii) und (iv) äquivalent sind und aus (iii) folgen, die Umkehrung aber nicht gilt.

Gelte (ii). Ist $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ so folgt aus (ii) auch $Tx_n \rightharpoonup Tx$, also $y = Tx$. Somit hat T einen abgeschlossenen Graphen und ist folglich stetig, was (i) zeigt.

Gelte nun (i), d.h. T sei beschränkt. Für $x_n \rightharpoonup x$ und $y' \in F'$ folgt dann

$$\langle Tx_n, y' \rangle = \langle x_n, T'y' \rangle \to \langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle ,$$

was gerade $Tx_n \rightharpoonup Tx$ bedeutet. Wir haben also (iv) gezeigt.

Die Implikation von (iv) nach (ii) ist trivial, womit die Äquivalenz von (i), (ii) und (iv) gezeigt ist.

Die Implikation von (iii) nach (i) ist ebenfalls trivial. Es bleibt also nur noch, einen beschränkten Operator zu finden, der nicht (iii) erfüllt. Hierzu kann man die Identität auf $E = F = \ell^2$ betrachten und $x_n := e_n$ als Einheitsvektoren wählen.

Bemerkung: Es gibt Paare (E, F) von Banachräumen, in denen (iii) ebenfalls äquivalent zu den anderen Aussagen ist, beispielsweise falls in E oder F schwache Konvergenz und Normkonvergenz für Folgen übereinstimmen wie beispielsweise in endlich-dimensionalen Räumen oder ℓ^1, aber auch falls jeder beschränkte Operator von E nach F kompakt ist wie beispielsweise für $E = \ell^q$ und $F = \ell^p$ für $q > p$.

41. Eine lineare Abbildung $\mathrm{Lim}\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, falls

(L1) $\mathrm{Lim}(\mathbb{1}) = 1$;

(L2) $\mathrm{Lim}(x) \geq 0$, falls $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(L3) $\mathrm{Lim}(Lx) = \mathrm{Lim}(x)$, wobei $Lx := (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Zeige:

(a) Sei Lim ein Banachlimes. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Lim} \in (\ell^\infty)'$ mit $\| \mathrm{Lim} \| = 1$. (1)

Lösung: Sei $x \in \ell^\infty$ und $y := \|x\|_\infty \mathbb{1}$. Dann ist $y_n \pm x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\mathrm{Lim}(y \pm x) \geq 0$, also $\mp \mathrm{Lim}(x) \leq \mathrm{Lim}(y) = \|x\|_\infty$, was $\| \mathrm{Lim} \| \leq 1$ zeigt.

(ii) $\liminf x \leq \mathrm{Lim}(x) \leq \limsup x$ für alle $x \in \ell^\infty$. (1)

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt n_0 mit $x_n \leq s + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, wobei $s := \limsup x$ sei. Somit ist $L^{n_0} x \leq (s + \varepsilon)\, \mathbb{1}$, was

$$\mathrm{Lim}(x) = \mathrm{Lim}(L^{n_0} x) \leq \mathrm{Lim}((s + \varepsilon)\, \mathbb{1}) = s + \varepsilon$$

zeigt. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mathrm{Lim}(x) \leq s = \limsup x$. Also gilt auch $-\mathrm{Lim}(x) = \mathrm{Lim}(-x) \leq \limsup(-x) = -\liminf x$, womit insgesamt die Behauptung gezeigt ist.

(iii) $\mathrm{Lim}(x) = \lim x$ für $x \in c$. (1)

Lösung: Dies folgt aus dem vorigen Aufgabenteil.

(iv) Ist $x \in \ell^\infty$ periodisch mit Periodenlänge $p \in \mathbb{N}$, so ist $\mathrm{Lim}(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x_k$. (2)

Lösung: Ist x periodisch, so folgt $\sum_{k=1}^p L^k x = \sum_{k=1}^p x_k \, \mathbb{1}$, also

$$p \, \mathrm{Lim}(x) = \sum_{k=1}^p \mathrm{Lim}(L^k x) = \sum_{k=1}^p x_k,$$

was die Behauptung zeigt.

(v) Es gibt $x, y \in \ell^\infty$ mit $\mathrm{Lim}(x \cdot y) \neq \mathrm{Lim}(x)\,\mathrm{Lim}(y)$, wobei $x \cdot y := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. Lim ist nicht multiplikativ. (1)

Lösung: Sei $x_n := (-1)^n$. Dann ist $x \in \ell^\infty$ und nach dem vorigen Aufgabenteil $\mathrm{Lim}(x) = 0$. Somit ist $\mathrm{Lim}(x \cdot x) = \mathrm{Lim}(\mathbb{1}) = 1 \neq 0 = \mathrm{Lim}(x)\,\mathrm{Lim}(x)$.

(b) Es gibt einen Banachlimes. (+2)

Tipp: Zeige, dass $p(x) := \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ ein sublineares Funktional auf ℓ^∞ definiert.

Lösung: Aus $\sup_{m\geq n}(y_m + z_m) \leq \sup_{m\geq n} y_m + \sup_{m\geq n} z_m$ folgt $\limsup(y+z) \leq \limsup y + \limsup z$ für alle Folgen $y, z \in \ell^\infty$, woraus man sofort die Sublinearität von p erhält. Wir definieren ein Funktional φ auf dem von $\mathbb{1}$ aufgespannten eindimensionalen Unterraum von ℓ^∞ durch $\varphi(\lambda\mathbb{1}) := \lambda = p(\lambda\mathbb{1})$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine lineare Fortsetzung Lim von φ mit $\operatorname{Lim}(x) \leq p(x)$ für alle $x \in \ell^\infty$.

Also ist sicherlich $\operatorname{Lim}(\mathbb{1}) = 1$. Ist $x_n \geq 0$, so ist

$$-\operatorname{Lim}(x) = \operatorname{Lim}(-x) \leq p(-x) = -\liminf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \leq 0,$$

was $\operatorname{Lim}(x) \geq 0$ zeigt. Zudem gilt

$$\operatorname{Lim}(x - Lx) \leq p(x - Lx) = \limsup \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1}) = \limsup \frac{x_1 - x_{n+1}}{n} = 0$$

und analog $\operatorname{Lim}(Lx - x) \leq 0$, also $\operatorname{Lim}(Lx) = \operatorname{Lim}(x)$.

42. Sei E ein separabler Banachraum und (x_k) eine abzählbare Teilmenge von E mit $\|x_k\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} = E$. Setze

$$\|x'\|_* := \sum_{k=1}^\infty \frac{|\langle x', x_k\rangle|}{2^k}$$

für $x' \in E'$. Zeige:

(a) $\|\cdot\|_*$ ist eine Norm auf E' mit $\|x'\|_* \leq \|x'\|$ für alle $x' \in E'$. (+2)

Lösung: Endlichkeit, Positivität, Homogenität, Dreiecksungleichung und die Abschätzung sind klar. Sei nun $\|x'\|_* = 0$. Dann ist $\langle x', x_k\rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher $x' = 0$ auf $\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, was wegen Dichtheit $x' = 0$ zeigt.

(b) Sei (x_n') eine beschränkte Folge in E', d.h. $\sup_n \|x_n'\| < \infty$, und sei $x' \in E'$. Es gilt genau dann $x_n' \rightharpoonup^* x'$, wenn $\|x_n' - x'\|_* \to 0$ erfüllt ist. (+2)

Lösung: Gelte zuerst $\|x_n' - x'\|_* \to 0$. Dann gilt $|\langle x_n' - x', x_k\rangle| \leq 2^k\|x_n' - x'\|_* \to 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\langle x_n', x\rangle \to \langle x', x\rangle$ für alle $x \in \operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Weil (x_n') beschränkt ist, folgt wegen Dichtheit laut Vorlesung $\langle x_n', x\rangle \to \langle x', x\rangle$ für alle $x \in E$, also $x_n' \rightharpoonup^* x'$.

Gelte nun $x_n' \rightharpoonup^* x'$. Wähle $M > 0$ mit $\|x_n'\| \leq M$ und $\|x'\| \leq M$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{2^{k_0}} \leq \frac{\varepsilon}{M}$ gilt. Wegen $x_n' \rightharpoonup^* x'$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\langle x_n', x_k\rangle - \langle x', x_k\rangle| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $1 \leq k \leq k_0$. Dann ist

$$\|x_n' - x'\|_* \leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|\langle x_n' - x', x_k\rangle|}{2^k} + \sum_{k=k_0+1}^\infty \frac{\|x_n' - x'\|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{2M}{2^{k_0}} \leq 3\varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, was die Behauptung zeigt.

(c) Die abgeschlossene Einheitskugel $B_{E'}$ von $(E', \|\cdot\|)$ ist kompakt in $(E', \|\cdot\|_*)$. (+2)

Lösung: Wir zeigen die Folgenkompaktheit. Sei dazu (x_n') eine Folge in $B_{E'}$. Da E separabel ist, gibt es laut Vorlesung ein $x' \in E'$ mit $x_n' \rightharpoonup^* x'$. Nach dem vorigen Aufgabenteil folgt daraus $\|x_n' - x'\|_* \to 0$. Es muss also nur noch $x' \in B_{E'}$ gezeigt werden. Für $x \in B_E$ gilt aber

$$|\langle x', x\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle x_n', x\rangle| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n'\|\,\|x\| \leq 1,$$

was $\|x'\| \leq 1$ zeigt.

(d) Versieht man $B_{E'}$ mit der von $\|\cdot\|_*$ induzierten Metrik, so erhält man einen vollständigen metrischen Raum, aber der Raum $(E', \|\cdot\|_*)$ ist nicht vollständig, falls E unendlichdimensional ist. (+2)

Lösung: Wir haben im vorigen Aufgabenteil gesehen, dass $B_{E'}$ bezüglich der von $\|\cdot\|_*$ induzierten Metrik kompakt ist, insbesondere also vollständig.

Sei nun $(E', \|\cdot\|_*)$ als vollständig angenommen. Nach dem Satz über äquivalente Normen und wegen $\|x'\|_* \leq \|x'\|$ für alle $x' \in E'$ sind dann $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ äquivalent. Folglich ist $B_{E'}$ auch in $(E', \|\cdot\|)$ kompakt, was laut Vorlesung zeigt, dass E' endlichdimensional ist. Dann ist auch E'' endlich-dimensional und wegen isometrischer Einbettung auch E.

43. Sei E ein separabler Banachraum und $\|\cdot\|_*$ wie in Aufgabe 42. Sei F ein abgeschlossener Unterraum von E. Zeige:

(a) Sei $A := \{x' \in B_{E'} : x'|_F = 0\}$ und $(x'_n) \subset B_{E'}$. Es gelte $\langle x'_n, x\rangle \to 0$ für alle $x \in F$. Dann folgt $\operatorname{dist}_*(x'_n, A) := \inf_{y' \in A} \|x'_n - y'\|_* \to 0$. (+2)

Lösung: Angenommen, $\operatorname{dist}_*(x'_n, A) \not\to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir dann $\operatorname{dist}_*(x'_n, A) \geq \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ annehmen. Nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge können wir zudem $x'_n \rightharpoonup^* x' \in B_{E'}$ annehmen. Für $x \in F$ gilt $\langle x', x\rangle = \lim \langle x'_n, x\rangle = 0$ nach Voraussetzung. Also ist $x' \in A$, was

$$\varepsilon \leq \operatorname{dist}_*(x'_n, A) \leq \|x'_n - x'\|_* \to 0$$

zeigt, einen Widerspruch.

(b) Ist F isomorph zu c_0, so ist F projezierbar. (+2)
Tipp: Orientiere dich am Beweis von Aufgabe 26 und verwende Aufgabenteil (a).

Lösung: Sei $T\colon F \to c_0$ ein Isomorphismus und $\varphi_k \in c_0'$ die Koordinatenauswertung $\varphi_k(x) := x_k$. Nach dem Satz von Hahn-Banach hat $\psi_k := \varphi_k \circ T \in F'$ eine Fortsetzung $\psi'_k \in E'$ mit $\|\psi'_k\| \leq \|T\|$. Für $x \in F$ gilt

$$\psi'_k(x) = \psi_k(x) = \varphi_k(Tx) \to 0,$$

für $k \to \infty$ wegen $Tx \in c_0$. Nach dem vorigen Aufgabenteil folgt $\operatorname{dist}_*(\frac{\psi_k}{\|T\|}, A) \to 0$, wobei A wie oben definiert sei. Wir finden also eine Folge $(\xi_k) \subset E'$ mit $\|\xi_k\| \leq \|T\|$, $\xi_k|_F = 0$ und $\|\psi'_k - \xi_k\|_* \to 0$, wobei Letzteres gerade $\xi_k - \psi'_k \rightharpoonup^* 0$ bedeutet. Das zeigt $Qx := (\psi'_k(x) - \xi_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$. Die Beschränktheit von Q folgt aus $\|\psi'_k - \xi_k\| \leq 2\|T\|$. Also ist $P := T^{-1}Q$ ein beschränkter Operator von E nach $F \subset E$, und für $x \in F$ gilt

$$Qx = (\psi'_k(x) - \xi_k(x))_{k\in\mathbb{N}} = (\psi_k(x))_{k\in\mathbb{N}} = (\varphi_k(Tx))_{k\in\mathbb{N}} = Tx,$$

woraus $Px = x$ für $x \in F$ folgt. Wir haben gezeigt, dass P eine stetige Projektion von E auf F ist.

44. Sei E ein separabler Banachraum und $\|\cdot\|_*$ wie in Aufgabe 42. Sei (y_n) eine Folge in E mit $y_n \rightharpoonup 0$. Zeige:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $A_k := \{y' \in B_{E'} : \left|\langle y', y_n\rangle\right| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq k\}$ abgeschlossen in $(B_{E'}, \|\cdot\|_*)$. (+2)

Lösung: Sei $(y'_m) \subset A_k$ konvergent bezüglich $\|\cdot\|_*$ gegen ein $y' \in B_{E'}$. Dann gilt $y'_m \rightharpoonup^* y'$ und somit

$$|\langle y', y_n\rangle| = \lim_{m\to\infty} |\langle y'_m, y_n\rangle| \leq \varepsilon,$$

also $y' \in A_k$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $k_0 \in \mathbb{N}$, $y'_0 \in B_{E'}$ und $r_0 > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $y' \in B_{E'}$ mit $\|y' - y'_0\|_* < r_0$ die Abschätzung $|\langle y', y_n \rangle| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq k_0$ gilt. (+2)
Tipp: Satz von Baire

Lösung: Aus der Voraussetzung $y_n \rightharpoonup 0$ folgt, dass es zu jedem $y' \in B_{E'}$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $|\langle y', y_n \rangle| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq k$, also $y' \in A_k$. Das zeigt $B_{E'} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Weil $B_{E'}$ ein bezüglich $\|\cdot\|_*$ vollständiger metrischer Raum ist, in dem A_k abgeschlossen ist, hat nach dem Satz von Baire eine der Mengen A_k einen inneren Punkt, was lediglich eine Umformulierung der Behauptung dieser Teilaufgabe ist.

(c) Ist $E = \ell^1$, so gilt $y_n \to 0$; somit konvergiert eine Folge in ℓ^1 genau dann in Norm, wenn sie schwach konvergiert. (+2)
Tipp: Wähle $x_k \coloneqq e_k$ und betrachte $y'_n \in (\ell^1)' = \ell^\infty$ mit $y'_{n,i} \coloneqq y'_{0,i}$ für $i \leq i_0$ und $y'_{n,i} \coloneqq \overline{\operatorname{sgn} y_{n,i}}$ für $i > i_0$ mit einem $i_0 \in \mathbb{N}$.

Lösung: Die Vektoren $x_k \coloneqq e_k$ erfüllen die Bedingungen aus Aufgabe 42. Seien y_0, k_0 und r_0 wie im vorigen Aufgabenteil. Sei $\varepsilon > 0$, sei i_0 so groß, dass $\frac{1}{2^{i_0}} < \frac{r_0}{2}$ ist, und sei y'_n wie im Tipp. Beachte $\|y'_n\|_\infty \leq 1$, also $y'_n \in B_{E'}$, und

$$\begin{aligned}\|y'_m - y'_0\|_* &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle y'_m - y'_0, x_k \rangle|}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y'_{m,k} - y'_{0,k}|}{2^k} \\ &= \sum_{k=i_0+1}^{\infty} \frac{|\overline{\operatorname{sgn} y_{m,k}} - y'_{0,k}|}{2^k} \leq \frac{2}{2^{i_0}} < r_0\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, was $|\langle y'_m, y_n \rangle| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq k_0$ und alle $m \in \mathbb{N}$ zeigt. Zudem können wir wegen schwacher Konvergenz $|y_{n,i}| \leq \frac{\varepsilon}{i_0}$ für alle $n \geq n_0$ und alle $1 \leq i \leq i_0$ erreichen. Insgesamt erhalten wir damit

$$\|y_n\|_1 = \sum_{i=1}^{i_0} |y_{n,i}| + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} y_{n,i}\, y'_{n,i} \leq \varepsilon + \langle y_n, y'_n \rangle - \sum_{i=1}^{i_0} y_{n,i}\, y'_{0,i} \leq 3\varepsilon$$

für alle $n \geq \max\{k_0, n_0\}$. Dies zeigt $y_n \to 0$.