Funktionalanalysis: Blatt 10

45. Seien E und F normierte Räume und $T \in \mathscr{L}(E, F)$ von endlichem Rang. Zeige:

(a) Es gibt endliche Folgen $(x'_i)_{i=1}^n \subset E'$ und $(y_i)_{i=1}^n \subset F$ mit $T = \sum_{i=1}^n x'_i \otimes y_i$, d.h. $Tx = \sum_{i=1}^n \langle x'_i, x \rangle\, y_i$. (2)

(b) $\dim \operatorname{Rg} T = \operatorname{rk} T \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N}_0 : T = \sum_{i=1}^n x'_i \otimes y_i\}$. (2)

46. Sei $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ und $T_0 \colon c_{00} \to c_{00}$ durch $T_0 x \coloneqq (\lambda_n x_n)$ für $x \in c_{00}$ definiert. Sei $p \in [1, \infty)$. Wir versehen c_{00} mit der Norm von ℓ^p für ein $p \in [1, \infty)$ Zeige:

(a) T_0 ist genau dann beschränkt, wenn $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ gilt. (2)

Sei nun $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ und $T \in \mathscr{L}(\ell^p)$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von T_0.

(b) T hat genau dann endlichen Rang, wenn $(\lambda_n) \in c_{00}$ gilt. (2)

(c) T ist genau dann kompakt, wenn $(\lambda_n) \in c_0$ gilt. (2)

47. Sei $k \in \mathrm{C}([0, 1]^2)$ und $(Tu)(x) \coloneqq \int_0^1 k(x, y)u(y)\,\mathrm{d}y$. Zeige:

(a) T ist ein kompakter Operator von $L^1(0, 1)$ nach $\mathrm{C}[0, 1]$. (2)
Tipp: Satz von Arzela-Ascoli.

(b) T ist ein kompakter Operator von $L^2(0, 1)$ nach $L^2(0, 1)$. (2)

48. Sei H ein Hilbertraum und $T \colon H \to H$ linear und symmetrisch, also $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in H$. Zeige, dass T dann auch beschränkt ist! (2)

49. (a) Sei $(\lambda_n) \in \ell^\infty$. Nach Aufgabe 46 definiert $Tx \coloneqq (\lambda_n x_n)$ einen beschränkten Operator auf ℓ^2. Bestimme $\sigma_p(T)$ und $\sigma(T)$! (2)

(b) Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Zeige, dass es $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ mit $\sigma(T) = K$ gibt! (2)