# Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 10

**45.** Seien $E$ und $F$ normierte Räume und $T \in \mathscr{L}(E, F)$ von endlichem Rang. Zeige:

(a) Es gibt endliche Folgen $(x_i')_{i=1}^n \subset E'$ und $(y_i)_{i=1}^n \subset F$ mit $T = \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i$, d.h. $Tx = \sum_{i=1}^n \langle x_i', x\rangle\, y_i$. (2)

**Lösung:** Sei $(y_i)_{i=1}^n$ eine Basis von $\operatorname{Rg} T$. und sei $\alpha_i\colon \operatorname{Rg} T \cong \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ die Projektion auf die $i$.te Koordinate bezüglich dieser Basisdarstellung. Dann gilt $Tx = \sum_{i=1}^n \alpha_i(Tx) \cdot y_i$. Mit $x_i' \coloneqq \alpha_i \circ T \in E'$ folgt die Behauptung.

(b) $\dim \operatorname{Rg} T = \operatorname{rk} T \coloneqq \min\{n \in \mathbb{N}_0 : T = \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i\}$. (2)

**Lösung:** Die Konstruktion im vorigen Aufgabenteil zeigt $\operatorname{rk} T \le \dim \operatorname{Rg} T$. Aus $\operatorname{Rg} \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i \subset \operatorname{span}\{y_i : i = 1, \dots, n\}$ folgt $\dim \operatorname{Rg} T = \dim \operatorname{Rg} \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i \le n$ für jede Darstellung $T = \sum_{i=1}^n x_i' \otimes y_i$, was $\dim \operatorname{Rg} T \le \operatorname{rk} T$ zeigt.

**46.** Sei $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ und $T_0\colon c_{00} \to c_{00}$ durch $T_0 x \coloneqq (\lambda_n x_n)$ für $x \in c_{00}$ definiert. Sei $p \in [1, \infty)$. Wir versehen $c_{00}$ mit der Norm von $\ell^p$ für ein $p \in [1, \infty)$ Zeige:

(a) $T_0$ ist genau dann beschränkt, wenn $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ gilt. (2)

**Lösung:** Ist $(\lambda_n) \in \ell^\infty$, also $|\lambda_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem $M \ge 0$, so ist

$$\|T_0 x\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n x_n|^p \le M^p \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p = M \|x\|_p^p,$$

also $\|T_0\| \le M$, was bedeutet, dass $T_0$ beschränkt ist.

Ist umgekehrt $T_0$ beschränkt, so folgt

$$|\lambda_n| = \|Te_n\|_p \le \|T\|\, \|e_n\|_p = \|T\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(\lambda_n) \in \ell^\infty$.

Sei nun $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ und $T \in \mathscr{L}(\ell^p)$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $T_0$.

(b) $T$ hat genau dann endlichen Rang, wenn $(\lambda_n) \in c_{00}$ gilt. (2)

**Lösung:** Ist $(\lambda_n) \in c_{00}$, also $\lambda_n = 0$ für $n > n_0$, so ist $\operatorname{Rg} T \subset \operatorname{span}\{e_n : n \le n_0\}$ endlichdimensional.

Ist umgekehrt $(\lambda_n) \notin c_{00}$, so gibt es eine unendliche Menge $A \subset \mathbb{N}$ mit $\lambda_n \ne 0$ für alle $n \in A$. Dann ist $e_n = T(\frac{e_n}{\lambda_n}) \in \operatorname{Rg} T$ für alle $n \in A$ und somit $\operatorname{span}\{e_n : n \in A\} \subset \operatorname{Rg} T$, was zeigt, dass $\operatorname{Rg} T$ nicht endlichdimensional ist.

(c) $T$ ist genau dann kompakt, wenn $(\lambda_n) \in c_0$ gilt. (2)

**Lösung:** Sei $(\lambda_n) \in c_0$. Setze $\lambda_n^{(m)} \coloneqq \lambda_n \mathbb{1}_{\{n \le m\}}$ und $T^{(m)} x \coloneqq (\lambda_n^{(m)} x_n)$. Dann ist $(\lambda_n^{(m)}) \in c_{00}$ und somit $T^{(m)}$ von endlichem Rang, insbesondere also kompakt. Zudem gilt

$$\|T^{(m)} x - Tx\|_p^p = \sum_{n=m+1}^\infty |\lambda_n x_n|^p \le \sup_{n>m} |\lambda_n|^p\, \|x\|_p^p,$$

was $\|T^{(m)} - T\| \le \sup_{n>m} |\lambda_n| \to 0$ für $m \to \infty$ zeigt, also $T^{(m)} \to T$ in $\mathscr{L}(\ell^p)$. Weil der Raum der kompakten Operatoren in $\mathscr{L}(\ell^p)$ abgeschlossen ist, folgt hieraus die Kompaktheit von $T$.

Sei nun $(\lambda_n) \notin c_0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(n_k)$ mit $|\lambda_{n_k}| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für diese gilt

$$\|Te_{n_k} - Te_{n_\ell}\|_p^p = |\lambda_{n_k}|^p + |\lambda_{n_\ell}|^p \geq 2\varepsilon^p$$

für $k \neq \ell$, was zeigt, dass $(Te_{n_k})$ keine konvergente Teilfolge besitzt. Somit kann $T$ nicht kompakt sein.

**47.** Sei $k \in \mathrm{C}([0,1]^2)$ und $(Tu)(x) := \int_0^1 k(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$. Zeige:

(a) $T$ ist ein kompakter Operator von $L^1(0,1)$ nach $\mathrm{C}[0,1]$. (2)
**Tipp:** Satz von Arzela-Ascoli.

**Lösung:** Nach dem Satz von Arzela-Ascoli genügt es, punktweise Beschränktheit und Gleichstetigkeit der Menge $M := \{Tu : \|u\|_1 \leq 1\}$ zu zeigen; insbesondere ist dann auch $Tu \in \mathrm{C}[0,1]$ für alle $u \in L^1(0,1)$. Zum einen ist

$$|(Tu)(x)| \leq \int_0^1 |k(x,y)u(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|k\|_\infty \|u\|_1, \leq \|k\|_\infty$$

für $\|u\|_1 \leq 1$, was die punktweise Beschränktheit von $M$ zeigt. Zum anderen ist $k$ als stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig, es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|k(x_1,y_1) - k(x_2,y_2)| \leq \varepsilon$ für $|x_1 - x_2| \leq \delta$ und $|y_1 - y_2| \leq \delta$. Daher ist

$$|(Tu)(x_1) - (Tu)(x_2)| \leq \int_0^1 |k(x_1,y) - k(x_2,y)|\,|u(y)|\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon \|u\|_1 \leq \varepsilon$$

für $\|u\|_1 \leq 1$ und $|x_1 - x_2| \leq \delta$, was zeigt, dass $M$ gleichstetig ist.

(b) $T$ ist ein kompakter Operator von $L^2(0,1)$ nach $L^2(0,1)$. (2)

**Lösung:** Bezeichne $I_1 \in \mathscr{L}(L^2(0,1), L^1(0,1))$ und $I_2 \in \mathscr{L}(\mathrm{C}[0,1], L^2(0,1))$ die jeweiligen kanonischen Einbettungen. Sei $T_0$ der Operator $T$ aufgefasst als kompakter Operator von $L^1(0,1)$ nach $\mathrm{C}[0,1]$. Dann ist $T = I_2 T_0 I_1$ der entsprechende Operator auf $L^2(0,1)$ und somit aufgrund der Idealeigenschaft kompakter Operatoren ebenfalls kompakt.

**48.** Sei $H$ ein Hilbertraum und $T\colon H \to H$ linear und symmetrisch, also $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ für alle $x, y \in H$. Zeige, dass $T$ dann auch beschränkt ist! (2)

**Lösung:** Es gelte $x_n \to x$ und $Tx_n \to z$. Dann folgt

$$(z \mid y) \leftarrow (Tx_n \mid y) = (x_n \mid Ty) \to (x \mid Ty) = (Tx \mid y)$$

für alle $y \in H$, was $Tx = z$ zeigt. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt nun, dass $T$ beschränkt ist.

**49.** (a) Sei $(\lambda_n) \in \ell^\infty$. Nach Aufgabe 46 definiert $Tx := (\lambda_n x_n)$ einen beschränkten Operator auf $\ell^2$. Bestimme $\sigma_p(T)$ und $\sigma(T)$! (2)

**Lösung:** Wir zeigen $\sigma_p(T) = \Lambda := \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\sigma(T) = \overline{\Lambda}$.
Sei zuerst $\lambda \in \Lambda$, also $\lambda = \lambda_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $Te_n = \lambda_n e_n = \lambda e_n$, also $\lambda \in \sigma_p(T)$. Sei umgekehrt $\lambda \in \sigma_p(T)$ und $x \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\lambda$, also $(Tx)_n = \lambda_n x_n = \lambda x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lambda_n = \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq 0$, und wegen $x \neq 0$ also für mindestens ein $n$, was $\lambda \in \Lambda$ zeigt. Wir haben somit $\sigma_p(T) = \Lambda$ bewiesen.
Wegen $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ und weil $\sigma(T)$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{\Lambda} \subset \sigma(T)$. Sei nun $\lambda \notin \overline{\Lambda}$. Wegen Kompaktheit von $\overline{\Lambda}$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $|\lambda - \lambda_n| \geq \varepsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(\frac{1}{\lambda - \lambda_n}) \in \ell^\infty$. Daher definiert $S_\lambda x := (\frac{x_n}{\lambda - \lambda_n})$ nach Aufgabe 46 einen beschränkten Operator auf $\ell^2$, für den nach Definition $S_\lambda(\lambda - T) = I$ und $(\lambda - T)S_\lambda = I$ gilt. Also ist $\lambda - T$ invertierbar, was $\lambda \notin \sigma(T)$ zeigt. Wir haben $\sigma(T) = \overline{\Lambda}$ bewiesen.

(b) Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Zeige, dass es $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$ mit $\sigma(T) = K$ gibt! (2)

**Lösung:** Der metrische Raum $K$ ist als Teilmenge des separablen metrischen Raums $\mathbb{C}$ separabel. Es gibt also eine Folge $(\lambda_n) \subset K$, die dicht in $K$ liegt, und weil $K$ beschränkt ist, gilt $(\lambda_n) \in \ell^\infty$. Nach dem vorigen Aufgabenteil definiert dann $Tx \coloneqq (\lambda_n x_n)$ einen beschränkten Operator auf $\ell^2$ mit $\sigma(T) = K$.