Universität Ulm

Donnerstag, 27.01.2011

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+2

Funktionalanalysis: Blatt 11

50. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \neq 0$. Zeige:

(a) Es gibt einen abgeschlossenen Unterraum U von X mit $\operatorname{Kern}(\lambda - T) \oplus U = X$. Für jeden solchen Unterraum gibt es ein $\alpha > 0$ mit $\|(\lambda - T)x\| \geq \alpha \|x\|$ für alle $x \in U$. (2)

(b) $\operatorname{Rg}(\lambda - T)$ ist abgeschlossen. (2)

51. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \neq 0$. Zeige, dass der Operator $\lambda - T$ genau dann injektiv ist, wenn er surjektiv ist! (2)

52. Seien H_1 und H_2 (reelle oder komplexe) Hilberträume und $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Zeige, dass $\|T^*T\| = \|T\|^2$ gilt! (2)

53. Sei L der Linksshift $Lx := (x_2, x_3, x_4, \dots)$ und R der Rechtshift $Rx := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ auf ℓ^2. Zeige:

(a) $L^* = R$ und $R^* = L$. (2)

(b) L und R sind nicht normal. (2)

(c) $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ und $\sigma_p(R) = \emptyset$. (2)

(d) $\sigma(L) = \sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. (2)

54. Sei $T := LD_\lambda$, wobei L der Linksshift auf ℓ^2 und D_λ der Diagonaloperator zu einer Folge $(\lambda_n) \in c_0$ sei, für die $\lambda_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte.

(a) Zeige, dass $T \in \mathcal{K}(\ell^2)$ gilt und T nicht normal ist! (2)

(b) Bestimme die eindeutige Polarzerlegung $T = UP$, bei der $P \geq 0$ gilt und U eine partielle Isometrie mit $\operatorname{Kern} U = \operatorname{Kern} P$ ist! (2)

(c) Zeige, dass es keine Darstellung $T = UP$ mit $P \geq 0$ und isometrischem U gibt! (+2)