Universität Ulm

Donnerstag, 27.01.2011

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+2

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 11

50. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \neq 0$. Zeige:

(a) Es gibt einen abgeschlossenen Unterraum U von X mit $\operatorname{Kern}(\lambda - T) \oplus U = X$. Für jeden solchen Unterraum gibt es ein $\alpha > 0$ mit $\|(\lambda - T)x\| \geq \alpha\|x\|$ für alle $x \in U$. (2)

Lösung: Laut Vorlesung ist $\operatorname{Kern}(\lambda - T)$ endlich-dimensional und somit nach Satz (9.12) komplementiert. Es gibt also einen abgeschlossenen Unterraum U mit $\operatorname{Kern}(\lambda - T) \oplus U = X$. Sei nun U ein beliebiger solcher Unterraum. Angenommen, es gäbe kein $\alpha > 0$ mit $\|(\lambda - T)x\| \geq \alpha\|x\|$ für alle $x \in U$. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subset U$ mit $\|x_n\| = 1$, für die $(\lambda - T)x_n \to 0$ gilt. Nach Übergang zu einer Teilfolge kann man $Tx_n \to y$, also $\lambda x_n = (\lambda - T)x_n + Tx_n \to y$ annehmen, womit (x_n) gegen ein $x \in U$ konvergiert. Dann ist aber $\|x\| = 1$ und $(\lambda - T)x = \lim_{n\to\infty}(\lambda - T)x_n = 0$, also $x \in U \cap \operatorname{Kern}(\lambda - T)$ im Widerspruch zur Wahl von U.

(b) $\operatorname{Rg}(\lambda - T)$ ist abgeschlossen. (2)

Lösung: Nach dem vorigen Aufgabenteil ist $S := (\lambda - T)|_U$ ein Isomorphismus von U nach $\operatorname{Rg} S = \operatorname{Rg}(\lambda - T)$.

51. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \neq 0$. Zeige, dass der Operator $\lambda - T$ genau dann injektiv ist, wenn er surjektiv ist! (2)

Lösung: Sei $\lambda - T$ injektiv, also $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Laut Vorlesung ist dann $\lambda \notin \sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, was gerade bedeutet, dass $\lambda - T$ invertierbar und somit insbesondere surjektiv ist.

Sei nun $\lambda - T$ surjektiv. Sei $x' \in X'$ und $(\lambda - T')x' = 0$. Dann ist

$$\left\langle x', (\lambda - T)x \right\rangle = \left\langle (\lambda - T')x', x \right\rangle = 0$$

für alle $x \in X$, und wegen Surjektivität von $\lambda - T$ somit $x' = 0$. Wir haben gezeigt, dass $\lambda - T'$ injektiv ist, also $\lambda \notin \sigma_p(T')$ und somit $\lambda \notin \sigma(T) = \sigma(T') = \sigma_p(T') \cup \{0\}$ wegen Kompaktheit von T'. Somit ist $\lambda - T$ invertierbar und insbesondere injektiv.

52. Seien H_1 und H_2 (reelle oder komplexe) Hilberträume und $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Zeige, dass $\|T^*T\| = \|T\|^2$ gilt! (2)

Lösung: Wegen

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} (Tx \mid y) = \sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1} (x \mid T^*y) = \sup_{\|y\|\leq 1} \|T^*y\| = \|T^*\|$$

ist

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2.$$

Zudem folgt aus

$$\|Tx\|^2 = (Tx \mid Tx) = (x \mid T^*Tx) \leq \|T^*T\|\|x\|^2$$

auch $\|T\| \leq \sqrt{\|T^*T\|}$.

53. Sei L der Linksshift $Lx := (x_2, x_3, x_4, \dots)$ und R der Rechtshift $Rx := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ auf ℓ^2. Zeige:

(a) $L^* = R$ und $R^* = L$. (2)

Lösung: Für $x, y \in \ell^2$ gilt

$$(x \mid L^*y) = (Lx \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}\overline{y}_n = \sum_{n=2}^{\infty} x_n\overline{y}_{n-1} = (x \mid Ry)\,,$$

was $L^* = R$ zeigt. Die zweite Identität folgt nun aus $R^* = (L^*)^* = L$.

(b) L und R sind nicht normal. (2)

Lösung: Man sieht sofort, dass $L^*L = RL$ die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \geq 2\}$ ist, während $LL^* = LR = I$ gilt. Also ist L nicht normal. Somit ist auch $L^* = R$ nicht normal.

(c) $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ und $\sigma_p(R) = \emptyset$. (2)

Lösung: Sei $|\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$ und $x_n := \lambda^n$. Dann ist $0 \neq x \in \ell^2$ und $Lx = (\lambda^{n+1}) = \lambda x$, also $\lambda \in \sigma_p(L)$. Zudem ist $Le_1 = 0$ und somit auch $0 \in \sigma_p(L)$. Sei nun $|\lambda| \geq 1$ und $Lx = \lambda x$ für ein $x \in \ell^2$, also $x_{n+1} = \lambda x_n$. Per Induktion beweist man leicht, dass dann $x_n = \lambda^{n-1}x_1$ gelten muss. Diese Folge x kann nur dann in ℓ^2 sein, wenn $x = 0$ gilt. Also ist $\lambda \notin \sigma_p(L)$, und wir haben die erste Gleichheit bewiesen.

Der Operator R ist isometrisch, was $0 \notin \sigma_p(R)$ zeigt. Sei nun $\lambda \neq 0$ und $Rx = \lambda x$, also $0 = \lambda x_1$ und $x_{n-1} = \lambda x_n$ für $n \geq 2$. Dann ist $x_1 = 0$ und induktiv $x_n = \frac{x_{n-1}}{\lambda} = 0$ für $n \geq 2$, also $x = 0$. Dies zeigt $\lambda \notin \sigma_p(R)$.

(d) $\sigma(L) = \sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. (2)

Lösung: Die Abschätzung $r(L) \leq \|L\| \leq 1$ zeigt $\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Zudem ist $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} = \sigma_p(L) \subset \sigma(L)$. Weil $\sigma(L)$ abgeschlossen ist, folgt insgesamt $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Man sieht leicht, dass ein Operator T genau dann invertierbar ist, wenn T^* invertierbar ist, und in diesem Fall ist $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Das zeigt $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$, also $\sigma(R) = \sigma(L^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

54. Sei $T := LD_\lambda$, wobei L der Linksshift auf ℓ^2 und D_λ der Diagonaloperator zu einer Folge $(\lambda_n) \in c_0$ sei, für die $\lambda_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte.

(a) Zeige, dass $T \in \mathcal{K}(\ell^2)$ gilt und T nicht normal ist! (2)

Lösung: Laut Vorlesung ist D_λ und daher auch $T = LD_\lambda$ kompakt. Zudem ist

$$T^*Te_1 = D_{\overline{\lambda}}RLD_\lambda e_1 = 0$$

und

$$TT^*e_1 = LD_\lambda D_{\overline{\lambda}}Re_1 = |\lambda_2|^2 e_1 \neq 0,$$

was zeigt, dass T nicht normal ist.

(b) Bestimme die eindeutige Polarzerlegung $T = UP$, bei der $P \geq 0$ gilt und U eine partielle Isometrie mit $\operatorname{Kern} U = \operatorname{Kern} P$ ist! (2)

Lösung: Laut Vorlesung ist $P = |T| = \sqrt{T^*T}$. Man sieht wie im vorigen Aufgabenteil, dass $T^*T = D_\mu$ mit $\mu_1 := 0$ und $\mu_n := |\lambda_n|^2$ für $n \geq 2$ ist. Also ist $P = D_{\sqrt{\mu}}$ und somit

$$|\lambda_n| Ue_n = \sqrt{\mu_n}\, Ue_n = UPe_n = Te_n = LD_\lambda e_n = \lambda_n Le_n = \lambda_n e_{n-1}$$

für $n \geq 2$. Dies kann man auch als $Ue_n = \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} e_{n-1} = \operatorname{sgn}(\lambda_n) e_{n-1}$ schreiben. Damit ist U auf $\overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \geq 2\}$ bereits eindeutig festgelegt und offenbar isometrisch. Setzt man U durch $Ue_1 := 0$ auf ℓ^2 fort, ist U eine partielle Isometrie mit $UP = T$ und $\operatorname{Kern} U = \operatorname{span}\{e_1\} = \operatorname{Kern} P$.

(c) Zeige, dass es keine Darstellung $T = UP$ mit $P \geq 0$ und isometrischem U gibt! (+2)

Lösung: Sei $T = UP$ mit $P \geq 0$ und isometrischem U. Dann ist $\operatorname{Kern} U = \{0\}$ und somit nach Vorlesung $U^*U = I$. Daraus folgt $T^*T = P^2$ und somit $P = |T| = D_{\sqrt{\mu}}$ mit μ wie im vorigen Aufgabenteil. Wie im vorigen Aufgabenteil folgt dann $Ue_n = \operatorname{sgn}(\lambda_n)e_{n-1}$ und insbesondere $\overline{\operatorname{span}}\{Ue_n : n \geq 2\} = \ell^2$. Somit kann U nicht injektiv und insbesondere nicht isometrisch sein, ein Widerspruch.