Universität Ulm

Donnerstag, 03.02.2011

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+4

Funktionalanalysis: Blatt 12

55. Sei (E, P) ein lokalkonvexer Raum und P endlich. Zeige, dass es eine Norm $\|\cdot\|_E$ auf E gibt, für die Normtopologie und die gegebene lokalkonvexe Topologie übereinstimmen! (2)

56. Sei (E, P) ein lokalkonvexer Raum. Es bezeichne P' die Menge aller stetigen Halbnormen auf E. Zeige, dass (E, P) und (E, P') die gleiche Topologie tragen! (2)

57. Eine Folge (x_n) in einem topologischen Vektorraum E heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jeder Nullumgebung $U \subset E$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n - x_m \in U$ für alle $n, m \geq n_0$. Der Raum E heißt *folgenvollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergiert. Zeige, dass folgende Paare (E, P) folgenvollständige lokalkonvexe Räume sind:

(a) $E = \mathrm{C}^\infty[0,1]$, $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $p_n(u) := \sup_{x\in[0,1]} |u^{(n)}(x)|$. (2)

(b) $E = \mathcal{H}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$, $P = \{p_K : K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$ mit einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $p_K(u) := \sup_{x\in K} |u(x)|$. (2)

(c) E ein reflexiver Banachraum, $P = \{p_{x'} : x' \in E'\}$ mit $p_{x'}(x) := |\langle x', x\rangle|$. (2)

(d) $E = \mathcal{D}(\Omega) := \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ mit einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und P die Menge aller Halbnormen auf E, für die es zu allen kompakten Mengen $K \subset \Omega$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $c_{K,m} \geq 0$ gibt mit $p(u) \leq c_{K,m} \sum_{|\alpha|\leq m} p_{K,\alpha}(u)$ für alle $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, wobei $p_{K,\alpha}(u) := \sup_{x\in K} |D^\alpha u(x)|$ und $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}(\Omega) : u = 0 \text{ auf } K^c\}$ sei. (+4)
Tipp: Man zeige, dass es zu jeder Cauchy-Folge (u_n) in E eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ gibt mit $u_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ für alle n, und betrachte hierzu $p(u) := \sum_{n=1}^\infty a_n |u(x_n)|$ für passende $a_n > 0$ und $x_n \in \Omega$.

58. Sei $p \in (0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} : \int_\Omega |u|^p < \infty\}$, wobei wir Funktionen identifizieren, die fast überall übereinstimmen, und $d(f,g) := \int_\Omega |f-g|^p$ für $f, g \in L^p(\Omega)$. Zeige:

(a) Die Abbildung d ist eine translationsinvariante Metrik auf $L^p(\Omega)$. (2)

(b) Der Raum $L^p(\Omega)$ ist bezüglich der von d induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum. (2)

(c) Ist $V \subset L^p(\Omega)$ eine konvexe Umgebung der Null, so ist $V = L^p(\Omega)$. (2)
Tipp: Schreibe $f = \sum_{i=1}^n f\,\mathbb{1}_{\omega_i}$, wobei die ω_i eine geeignete Zerlegung von Ω bilden.

(d) Ist $\varphi : L^p(\Omega) \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional, so ist $\varphi = 0$. (2)

(e) Es gibt keine Familie P von Halbnormen, für die der lokalkonvexe Raum $(L^p(\Omega), P)$ die von d induzierte Topologie trägt. (2)