Universität Ulm

Donnerstag, 03.02.2011

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+4

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 12

55. Sei (E, P) ein lokalkonvexer Raum und P endlich. Zeige, dass es eine Norm $\|\cdot\|_E$ auf E gibt, für die Normtopologie und die gegebene lokalkonvexe Topologie übereinstimmen! (2)

Lösung: Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$. Dann definiert $\|x\|_E := \sum_{i=1}^n p_i(x)$ offenbar eine Norm auf E. Wir zeigen, dass die beiden Topologien übereinstimmen.

Sei zuerst O offen bezüglich der lokalkonvexen Topologie, und sei $x \in O$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $x + U_{P,\varepsilon} \subset O$. Ist nun $\|y - x\|_E < \varepsilon$, so ist inbesondere $p_i(y - x) < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$ und somit $y - x \in U_{P,\varepsilon}$, also $y = x + (y - x) \in O$. Wir haben $B_E(x, \varepsilon) \subset x + U_{P,\varepsilon} \subset O$ gezeigt, also dass x ein innerer Punkt von O bezüglich der Normtopologie ist. Weil x beliebig war, ist O somit offen in der Normtopologie.

Sei nun O offen in der Normtopologie, und sei $x \in O$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset O$. Ist $y \in U_{P,\varepsilon/n}$, so ist $\|y\|_E < \varepsilon$. Also gilt $x + U_{P,\varepsilon/n} \subset x + B_E(0, \varepsilon) \subset O$, was zeigt, dass x ein innerer Punkt von O bezüglich der lokalkonvexen Topologie ist. Weil x beliebig war, ist O offen in der lokalkonvexen Topologie.

56. Sei (E, P) ein lokalkonvexer Raum. Es bezeichne P' die Menge aller stetigen Halbnormen auf E. Zeige, dass (E, P) und (E, P') die gleiche Topologie tragen! (2)

Lösung: Bezeichne $\mathcal{T}_P$ und $\mathcal{T}_{P'}$ die jeweilige Topologie. Laut Vorlesung ist jedes $p \in P$ stetig, also $P \subset P'$. Ist $O \in \mathcal{T}_P$ und $x \in O$, so gibt es eine endliche Menge $Q \subset P \subset P'$ und $\varepsilon > 0$ mit $x + U_{Q,\varepsilon} \subset O$, was $O \in \mathcal{T}_{P'}$ zeigt.

Sei nun $O \in \mathcal{T}_{P'}$. Zu $x \in O$ wähle eine endliche Menge $Q \subset P'$ und $\varepsilon > 0$ mit $x + U_{Q,\varepsilon} \subset O$. Laut Vorlesung gibt es zu jedem $q \in Q$ ein $c_q \geq 0$ und eine endliche Menge $Q_q \subset P$ mit $q(x) \leq c_q \max_{p \in Q_q} p(x)$ für alle $x \in E$. Für $c := \max_{q \in Q} c_q$ und $Q' := \bigcup_{q \in Q} Q_q \subset P$ gilt nun offenbar $U_{Q',\varepsilon/c} \subset U_{Q,\varepsilon}$, was $O \in \mathcal{T}_P$ zeigt.

Bemerkung: Man kann das Argument ein wenig abkürzen, wenn man bereits weiß, dass Topologien genau dann gleich sind, wenn sie den gleichen Begriff der Netzkonvergenz induzieren, und benutzt, dass ein Netz (x_i) genau dann in $\mathcal{T}_P$ gegen ein x konvergiert, wenn $p(x_i - x)$ für jedes $p \in P$ gegen 0 konvergiert.

57. Eine Folge (x_n) in einem topologischen Vektorraum E heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jeder Nullumgebung $U \subset E$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n - x_m \in U$ für alle $n, m \geq n_0$. Der Raum E heißt *folgenvollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergiert. Zeige, dass folgende Paare (E, P) folgenvollständige lokalkonvexe Räume sind:

(a) $E = \mathrm{C}^\infty[0, 1]$, $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $p_n(u) := \sup_{x \in [0,1]} |u^{(n)}(x)|$. (2)

Lösung: In diesem und den folgenden Aufgabenteilen benutzen wir die Beobachtung, dass eine Folge (x_n) genau dann eine Cauchy-Folge in E ist, wenn es zu jedem $p \in P$ und $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $p(x_n - x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$; dies folgt leicht aus der Definition der Topologie.

Bereits p_0 ist separierend. Sei nun (u_n) eine Cauchy-Folge in E. Dann ist $(u_n^{(m)})$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{C}[0, 1]$ und somit konvergent. Sei u der Grenzwert von (u_n) in $\mathrm{C}[0, 1]$. Nach dem Satz über die Vertauschung von Differentiation mit gleichmäßigen Grenzwerten gilt $\lim_{n\to\infty} u_n^{(m)} = u^{(m)}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, was gerade $p(u_n - u) \to 0$ für alle $p \in P$ bedeutet, also $u_n \to u$ in E.

(b) $E = \mathcal{H}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$, $P = \{p_K : K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$ mit einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $p_K(u) := \sup_{x\in K} |u(x)|$. (2)

Lösung: Ist $p(f) = 0$ für alle $p \in P$, so ist $f = 0$ auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$. Betrachtet man speziell $K_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{B}_n(0)$, so sieht man, dass $f = 0$ auf ganz Ω gilt. Also ist P separierend.

Sei nun (f_n) eine Cauchy-Folge in E. Dann ist $(f_n|_K)$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{C}(K)$ für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ und somit konvergent gegen eine stetige Funktion f_K. Insbesondere konvergiert (f_n) punktweise auf ganz Ω gegen eine Funktion f, und natürlich gilt dann $f|_K = f_K$. Da Holomorphie äquivalent zur Cauchy'schen Integralformel ist, ergibt sich aus dem Satz über Vertauschung von Integralen und gleichmäßigen Grenzwerten, dass f wieder in $\mathcal{H}(\Omega)$ liegt. Also konvergiert die Folge (f_n) in E gegen f.

(c) E ein reflexiver Banachraum, $P = \{p_{x'} : x' \in E'\}$ mit $p_{x'}(x) := |\langle x', x\rangle|$. (2)

Lösung: Die Halbnormen P sind nach dem Satz von Hahn-Banach separierend. Sei nun (x_n) eine Cauchy-Folge in E. Dann ist $(\langle x', x_n\rangle)$ für alle $x' \in E'$ beschränkt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist dann (x_n) normbeschränkt. Da E reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $x_{n_k} \rightharpoonup x$ für ein $x \in E$. Weil $(\langle x', x_n\rangle)$ eine Cauchy-Folge ist und eine Teilfolge gegen $\langle x', x\rangle$ konvergiert, konvergiert $(\langle x', x_n\rangle)$ bereits selbst gegen $\langle x', x\rangle$. Wir haben $x_n \rightharpoonup x$ gezeigt. Das bedeutet aber gerade, dass (x_n) in E gegen x konvergiert.

(d) $E = \mathcal{D}(\Omega) := \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ mit einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und P die Menge aller Halbnormen auf E, für die es zu allen kompakten Mengen $K \subset \Omega$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $c_{K,m} \geq 0$ gibt mit $p(u) \leq c_{K,m} \sum_{|\alpha|\leq m} p_{K,\alpha}(u)$ für alle $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, wobei $p_{K,\alpha}(u) := \sup_{x\in K} |D^\alpha u(x)|$ und $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}(\Omega) : u = 0 \text{ auf } K^c\}$ sei. (+4)
Tipp: Man zeige, dass es zu jeder Cauchy-Folge (u_n) in E eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ gibt mit $u_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ für alle n; man betrachte hierzu $p(u) := \sum_{n=1}^\infty a_n|u(x_n)|$ für passende $a_n > 0$ und $x_n \in \Omega$.

Lösung: Nach Definition von P gilt insbesondere $p_{K,\alpha} \in P$ für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$, und genauer kann man $m = |\alpha|$ und $c_{K,0} = 1$ wählen. Ähnlich wie im obigen Aufgabenteil bei holomorphen Funktionen folgt daraus, dass P separierend ist.

Sei nun (u_n) eine Cauchy-Folge in E. Wir nehmen an, es gäbe keine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $u_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ für alle n. Dann gibt es nach Übergang zu einer Teilfolge eine Folge (x_n) in Ω mit $u_m(x_n) = 0$ für $m < n$ und $u_n(x_n) \neq 0$, die keinen Häufungspunkt in Ω besitzt. Setze $a_n := \frac{1}{|u_n(x_n)|}$ und $p(u) := \sum_{n=1}^\infty a_n|u(x_n)|$ für alle $u \in \mathcal{D}(\Omega)$; die Reihe konvergiert, da es zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ ein $n_0(K)$ gibt mit $x_n \notin K$ für $n \geq n_0(K)$, die Reihe also für jedes $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ abbricht. Es gilt sogar

$$p(u) \leq \sum_{n=1}^{n_0(K)} a_n|u(x_n)| \leq \Big(\sum_{n=1}^{n_0(K)} a_n\Big) p_{K,0}(u)$$

für alle $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, was nach Definition $p \in P$ zeigt. Also ist $p(u_n - u_m) \leq \frac{1}{2}$ für hinreichend große n und m gemäß der Wahl von (u_n). Andererseits ist aber

$$p(u_n - u_m) \geq a_n|u_n(x_n) - u_m(x_n)| = a_n|u_n(x_n)| = 1$$

für alle $m < n$, ein Widerspruch.

Sei nun also $K \subset \Omega$ kompakt mit $u_n \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ für alle n. Wegen $p_{K,0} \in P$ konvergiert dann (u_n) in $\mathrm{C}(K)$ gegen ein u, und wie im ersten Aufgabenteil erhält man die gleichmäßige Konvergenz von $D^\alpha u_n$ gegen $D^\alpha u$ auf K für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, in anderer Schreibweise also $p_{K,\alpha}(u_n - u) \to 0$. Nach Definition von P folgt daraus $p(u_n - u) \to 0$ für alle $p \in P$, also $u_n \to u$ in E.

58. Sei $p \in (0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $L^p(\Omega) := \{u\colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} : \int_\Omega |u|^p < \infty\}$, wobei wir Funktionen identifizieren, die fast überall übereinstimmen, und $d(f,g) := \int_\Omega |f-g|^p$ für $f, g \in L^p(\Omega)$. Zeige:

(a) Die Abbildung d ist eine translationsinvariante Metrik auf $L^p(\Omega)$. (2)

Lösung: Für reelle Zahlen $x, y \geq 0$ gilt wegen $1-p \geq 0$

$$x + y = x^p x^{1-p} + y^p y^{1-p} \leq x^p(x+y)^{1-p} + y^p(x+y)^{1-p} = (x^p + y^p)(x+y)^{1-p},$$

woraus sich die (im Fall $x = y = 0$ triviale) Abschätzung $(x+y)^p \leq x^p + y^p$ ergibt. Für messbare Funktionen f, g und h gilt also punktweise

$$|f-g|^p = |(f-h) + (h-g)|^p \leq (|f-h| + |h-g|)^p \leq |f-h|^p + |h-g|^p,$$

woraus durch Integration über Ω die Dreiecksungleichung $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$ folgt. Speziell mit $h = 0$ erhält man, dass das Integral in der Definition von d für alle $f, g \in L^p(\Omega)$ konvergiert. Symmetrie, positive Definitheit und Translationsinvarianz von d sind nach Definition klar.

(b) Der Raum $L^p(\Omega)$ ist bezüglich der von d induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum. (2)

Lösung: Die Vektorraumstruktur von $L^p(\Omega)$ bezüglich der natürlichen Addition und Skalarmultiplikation folgt aus den Überlegungen des vorigen Aufgabenteils. Es ist also nur noch die Stetigkeit der Vektorraumoperationen zu zeigen. Seien dazu (λ_n), (f_n) und (g_n) konvergente Folgen mit Grenzwerten λ, f und g. Dann gilt mit den Abschätzungen im vorigen Aufgabenteil

$$d(f_n + g_n, f + g) = \int_\Omega |f_n + g_n - f - g|^p \leq \int_\Omega |f_n - f|^p + \int_\Omega |g_n - g|^p \to 0$$

und

$$d(\lambda_n f_n, \lambda f) = \int_\Omega |\lambda_n f_n - \lambda f|^p \leq \int_\Omega |\lambda_n|^p |f_n - f|^p + \int_\Omega |\lambda_n - \lambda|^p |f|^p \to 0.$$

Weil $L^p(\Omega)$ ein metrischer Raum ist, folgt hieraus die Stetigkeit der Addition und Skalarmultiplikation.

(c) Ist $V \subset L^p(\Omega)$ eine konvexe Umgebung der Null, so ist $V = L^p(\Omega)$. (2)
Tipp: Schreibe $f = \sum_{i=1}^n f\,\mathbb{1}_{\omega_i}$, wobei die ω_i eine geeignete Zerlegung von Ω bilden.

Lösung: Wähle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) := \{f \in L^p(\Omega) : d(f,0) < \varepsilon\} \subset V$. Sei $f \in L^p(\Omega)$ beliebig und n so groß, dass $n^{p-1} \int_\Omega |f|^p < \varepsilon$ gilt. Sei $(\omega_i)_{i=1}^n$ eine Zerlegung von Ω in n Teilbereiche mit der Eigenschaft, dass $\int_{\omega_i} |f|^p = \frac{1}{n} \int_\Omega |f|^p$ gilt. Dann ist

$$d(nf\,\mathbb{1}_{\omega_i}, 0) = \int_\Omega |nf\,\mathbb{1}_{\omega_i}|^p = n^p \int_{\omega_i} |f|^p = n^{p-1} \int_\Omega |f|^p < \varepsilon$$

und somit $nf\,\mathbb{1}_{\omega_i} \in V$ für alle i. Weil V konvex ist, folgt

$$f = f \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\omega_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n nf\,\mathbb{1}_{\omega_i} \in V.$$

Weil f beliebig war, haben wir $V = L^p(\Omega)$ gezeigt.

Bemerkung: Zum Beweis der Existenz einer solchen Zerlegung von Ω überlege man sich mit dem Satz von Lebesgue, dass die Funktion I definiert durch $I(c) := \int_{\Omega \cap \{x_n \leq c\}} |f|^p$ auf $(-\infty, \infty)$ stetig ist mit $I(c) \to 0$ für $c \to -\infty$ und $I(c) \to \int_\Omega |f|^p$ für $c \to \infty$ und wende den Zwischenwertsatz an.

(d) Ist $\varphi\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional, so ist $\varphi = 0$. (2)

Lösung: Sei φ ein stetiges lineares Funktional auf V. Dann ist $V := \{u \in L^p(\Omega) : |\varphi(u)| < 1\}$ offen und konvex, nach dem vorigen Aufgabenteil also $V = L^p(\Omega)$. Gäbe es ein $u \in L^p(\Omega)$ mit $\varphi(u) \neq 0$, so wäre $\frac{2u}{\varphi(u)} \notin V$, ein Widerspruch. Also ist $\varphi = 0$.

(e) Es gibt keine Familie P von Halbnormen, für die der lokalkonvexe Raum $(L^p(\Omega), P)$ die von d induzierte Topologie trägt. (2)

Lösung: Dies folgt aus dem vorigen Aufgabenteil, da in lokalkonvexen Räumen der Satz von Hahn-Banach gilt, es also insbesondere nicht-triviale stetige Funktionale gibt. Alternativ kann man auch beobachten, dass für jedes $p \in P$ die Menge $U_{\{p\},1}$ eine konvexe Nullumgebung ist und daraus wie im vorigen Aufgabenteil $p = 0$ schlussfolgern, was bedeutet, dass P höchstens die triviale Halbnorm enthält, der Raum also die indiskrete Topologie tragen müsste, was in einem metrischen Raum mit mehr als einem Punkt nicht möglich ist.