UNIVERSITÄT ULM

Donnerstag, 10.02.2011

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+3

# Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 13

**59.** Sei $E$ ein lokalkonvexer Raum und $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ linear. Zeige:

(a) Ist $e \in E$ und $\varphi(e) \neq 0$, so gilt $E = \operatorname{Kern}\varphi \oplus \langle e \rangle$. (2)

**Lösung:** Ist $x \in \operatorname{Kern}\varphi \cap \langle e \rangle$, so ist $x = \lambda e$ und $0 = \varphi(x) = \varphi(\lambda e) = \lambda\varphi(e)$. Wegen $\varphi(e) \neq 0$ folgt $\lambda = 0$ und somit $x = 0$. Die Summe ist also direkt.

Sei nun $x \in E$ beliebig. Für $\lambda := \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}$ gilt dann $\varphi(x - \lambda e) = \varphi(x) - \lambda\varphi(e) = 0$, also $x = (x - \lambda e) + \lambda e \in \operatorname{Kern}\varphi + \langle e \rangle$.

(b) $\varphi$ ist genau dann stetig, wenn $\operatorname{Kern}\varphi$ abgeschlossen ist. (2)

**Lösung:** Ist $\varphi$ stetig, so ist $\operatorname{Kern}\varphi$ als Urbild von $\{0\}$ unter einer stetigen Funktion abgeschlossen.

Sei nun $\operatorname{Kern}\varphi$ abgeschlossen. Da für $\varphi = 0$ nichts zu zeigen ist, dürfen wir $\varphi \neq 0$ annehmen. Wähle $e \in E$ mit $e \notin \operatorname{Kern}\varphi$. Nach dem zweiten Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es $\psi \in E'$ mit $\operatorname{Re}\psi(y) < \operatorname{Re}\psi(e)$ für alle $y \in \operatorname{Kern}\varphi$. Weil $\operatorname{Kern}\varphi$ ein Unterraum ist, folgt daraus $\psi(e) \neq 0$ und $\psi(y) = 0$ für alle $y \in \operatorname{Kern}\varphi$. Mit $c := \frac{\varphi(e)}{\psi(e)}$ gilt dann für alle $y \in \operatorname{Kern}\varphi$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\varphi(y + \lambda e) = \lambda\,\varphi(e) = c\lambda\,\psi(e) = c\psi(y + \lambda e),$$

wegen $E = \operatorname{Kern}\varphi \oplus \langle e \rangle$ also $\varphi = c\psi \in E'$.

**60.** Seien $E_1$ und $E_2$ zwei lokalkonvexe Räume über demselben zugrundeliegenden Vektorraum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2)

(i) $E_1' \subset E_2'$.

(ii) Jede abgeschlossene konvexe Teilmenge von $E_1$ ist in $E_2$ abgeschlossen.

**Lösung:** Sei $E$ der zugrundeliegende Vektorraum, $E_1' \subset E_2'$ und $C \subset E_1$ abgeschlossen und konvex. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $(\varphi_i) \subset E_1'$ und $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$ mit $C = \bigcap_i \{x \in E : \operatorname{Re}\varphi_i(x) \geq \alpha_i\}$, siehe den Beweis von Aufgabe 29. Wegen $E_1' \subset E_2'$ ist $\{x \in E : \operatorname{Re}\varphi_i(x) \geq \alpha_i\}$ für jedes $i$ eine in $E_2$ abgeschlossene Menge. Somit ist $C$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen in $E_2$.

Sei nun jede abgeschlossene konvexe Teilmenge von $E_1$ in $E_2$ abgeschlossen und $\varphi \in E_1'$. Dann ist $\operatorname{Kern}\varphi$ in $E_1$ abgeschlossen und konvex. Also ist $\operatorname{Kern}\varphi$ in $E_2$ abgeschlossen. Nach der vorigen Aufgabe ist also $\varphi \in E_2'$.

**61.** Seien $E$ und $F$ Banachräume und sei $\mathscr{L}_{\mathrm{wop}}(E, F)$ der mit der schwachen Operatortopologie versehene Raum $\mathscr{L}(E, F)$, also mit der von $P := \{p_{x,y'} : x \in E, y' \in F'\}$ definierten lokalkonvexen Topologie, wobei $p_{x,y'}(T) := |\,\langle y', Tx \rangle\,|$ ist. Zeige:

(a) Es gilt genau dann $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathrm{wop}}(E, F)'$, wenn es Vektoren $(x_i)_{i=1}^m$ und $(y_i')_{i=1}^m$ gibt mit $\varphi(T) = \sum_{i=1}^m \langle y_i', Tx_i \rangle$. (2)

**Lösung:** Ist $\varphi(T) = \sum_{i=1}^m \langle y_i', Tx_i \rangle$, so ist

$$|\varphi(T)| \leq \sum_{i=1}^m p_{x_i,y_i'}(T) \leq m \max_{i=1,\dots,m} p_{x_i,y_i'}(T)$$

und daher $\varphi$ stetig.

Sei nun $\varphi$ stetig bezüglich der schwachen Operatortopologie. Dann gibt es $c \geq 0$ und endliche Folgen $(x_i)_{i=1}^m$ und $(y_i')_{i=1}^m$ mit $|\varphi(T)| \leq c \max_{i=1,\ldots,m} p_{x_i,y_i'}(T)$. Wegen $|p_{x_i,y_i'}(T)| = |\langle y_i', Tx_i \rangle| \leq \|y_i'\| \, \|Tx_i\| \leq c_i p_{x_i}(T)$ mit $p_x(T) := \|Tx\|$ gibt es dann $c' := c \max_{i=1,\ldots,m} c_i$ mit $|\varphi(T)| \leq c' \max_{i=1,\ldots,m} p_{x_i}(T)$, was zeigt, dass $\varphi$ auch stetig bezüglich der starken Operatortopologie ist. Nun folgt die Behauptung aus der in der Vorlesung behandelten Charakterisierung der stetigen Funktionale auf $\mathscr{L}_{\text{stop}}(E,F)$.

(b) Sei $C \subset \mathscr{L}(E,F)$ konvex. Die Menge $C$ ist genau dann abgeschlossen in $\mathscr{L}_{\text{wop}}(E,F)$, wenn sie in $\mathscr{L}_{\text{stop}}(E,F)$ abgeschlossen ist. (2)

**Lösung:** Im vorigen Aufgabenteil haben wir $\mathscr{L}_{\text{wop}}(E,F)' = \mathscr{L}_{\text{stop}}(E,F)'$ bewiesen, woraus mit der vorigen Aufgabe die Behauptung folgt.

(c) Sei $E = F = \ell^2$. Es gibt eine normabgeschlossene konvexe Menge in $\mathscr{L}(E,F)$, die in $\mathscr{L}_{\text{wop}}(E,F)$ nicht abgeschlossen ist. (2)

**Lösung:** Eine solche Menge ist $\mathcal{K}(\ell^2)$, die Menge der kompakten Operatoren auf $\ell^2$; beispielsweise definiert $P_n x := (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ eine Folge $(P_n)$ in $\mathcal{K}(\ell^2)$, die in der schwachen (und starken) Operatortopologie gegen $I \notin \mathcal{K}(\ell^2)$ konvergiert.

**Alternativlösung:** Mit der Darstellungsformel aus dem ersten Aufgabenteil sieht man leicht, dass $\mathscr{L}_{\text{wop}}(E,F)'$ in der Normtopologie separabel ist, falls $E$ und $F'$ separabel sind. Da die Menge der Diagonaloperatoren in $\mathscr{L}(\ell^2)$ isomorph zu $\ell^\infty$ ist, ist $\mathscr{L}(\ell^2)$ und somit $\mathscr{L}(\ell^2)'$ nicht separabel. Es gibt also ein $\varphi \in \mathscr{L}(\ell^2)'$ mit $\varphi \notin \mathscr{L}_{\text{wop}}(\ell^2)'$. Nun ist $\operatorname{Kern} \varphi$ eine normabgeschlossene konvexe Menge, die nach der vorigen Aufgabe in der schwachen Operatortopologie nicht abgeschlossen ist.

**62.** Sei $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ wie in Aufgabe 57 definiert, wobei wir nur reellwertige Funktionen zulassen. Wir betrachten den positiven Kegel $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : u(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N\}$. Zeige:

(a) Es gibt $\eta_n \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$ mit $\eta_n(x) \geq 1$ für $|x| \leq n$. (2)
**Tipp:** Zeige zuerst $\eta \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$ für $\eta(x) := \exp\bigl(\frac{1}{1-|x|^2}\bigr) \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}$.

**Lösung:** Für die Aussage im Tipp ist nur zu zeigen, dass $\eta$ auf der Einheitssphäre beliebig oft differenzierbar ist. Schreiben wir $\eta(x) = \varrho(1-|x|^2)$ mit $\varrho(r) := \exp\bigl(\frac{1}{r}\bigr)$ für $|x| < 1$, so sieht man sofort, dass wir nur zeigen müssen, dass $\lim_{r \to 0} \varrho^{(n)}(r) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, da $\eta$ dann als Verkettung von beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen wieder beliebig oft stetig differenzierbar ist. Durch vollständige Induktion sieht man, dass $\varrho^{(n)}(r) = \frac{p_n(r)}{q_n(r)} \exp\bigl(\frac{1}{r}\bigr)$ mit Polynomen $p_n$ und $q_n$ gilt, woraus mit Kenntnis des Wachstumsverhaltens der Exponentialfunktion die Behauptung über die Ableitungen von $\varrho$ folgt. Wir haben $\eta \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$ gezeigt.

Wähle nun $c \geq 0$ so groß, dass $c\,\eta(x) \geq 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt. Dann hat $\eta_n(x) := c\,\eta\bigl(\frac{x}{2n}\bigr)$ die gewünschten Eigenschaften.

(b) Sei $K_n := \{x \in \mathbb{R}^N : n-1 \leq |x| \leq n\}$, $p_n(u) := \sup_{x \in K_n} |u(x)|$ und $a_n \geq 0$. Dann definiert $p(u) := \sum_{n=1}^\infty a_n p_n(u)$ eine stetige Halbnorm $p$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. (2)

**Lösung:** Nach Definition der Topologie genügt es zu zeigen, dass es für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^N$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $c_{K,m} \geq 0$ gibt mit $p(u) \leq c_{K,m} \sum_{|\alpha| \leq m} p_{K,\alpha}(u)$ für alle $u \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^N)$.

Sei also $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset B(0, n_0 - 1)$. Für $u \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^N)$ gilt dann $p_n(u) \leq \sup|u| = p_{K,0}(u)$ für $n \leq n_0$ und $p_n(u) = 0$ für $n > n_0$. Die Behauptung folgt also mit $m := 0$ und $c_{K,0} := \sum_{n=1}^{n_0} a_n$.

(c) Sei $\varphi \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ positiv bezüglich $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$, und sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\varphi(u)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} \varphi(\eta_n)\, p_n(u)$. (2)

**Lösung:** Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Wegen $\eta_n \geq 1$ auf $K_n$ ist $u \leq \eta_n \cdot \sup_{K_n} |u| = \eta_n\, p_n(u)$ auf $K_n$ und somit $u \leq \sum_{n=1}^\infty \eta_n\, p_n(u)$ auf $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \mathbb{R}^N$. Wie im vorigen Aufgabenteil sieht man, dass $p_n(u) = 0$ für alle $n \geq n_0 = n_0(u)$ gilt, die Reihe also abbricht. Da $\varphi$ positiv und linear ist, folgt nun

$$\varphi(u) \leq \varphi\Big(\sum_{n=1}^{n_0} \eta_n\, p_n(u)\Big) = \sum_{n=1}^{n_0} \varphi(\eta_n)\, p_n(u).$$

Ersetzt man $u$ durch $-u$, erhält man zudem $-\varphi(u) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \varphi(\eta_n)\, p_n(u)$, was insgesamt die Behauptung zeigt.

(d) Ist $\varphi\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ positiv bezüglich $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$, so ist $\varphi$ stetig. (2)

**Lösung:** Nach den vorigen beiden Aufgabenteilen definiert $p(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\eta_n)\, p_n(u)$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, für die $|\varphi(u)| \leq p(u)$ für alle $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ gilt. Laut Vorlesung folgt daraus die Stetigkeit von $\varphi$.

**63.** Sei $E$ ein lokalkonvexer Raum und $E'$ mit der von den Halbnormen $P := \{p_x : x \in E\}$ induzierten Topologie versehen, wobei wir $p_x(x') := |\langle x', x\rangle|$ definieren. Sei $\varphi\colon E' \to \mathbb{K}$ linear und stetig. Zeige, dass es dann genau ein $x \in E$ mit $\varphi(x') = \langle x', x\rangle$ für alle $x' \in E'$ gibt! (+3)

**Bemerkung:** Dies zeigt, dass für einen Banachraum ein Element von $E''$ genau dann in $E$ liegt, wenn es bezüglich der schwach*-Topologie stetig ist.

**Lösung:** Die Eindeutigkeit von $x \in E$ ist klar. Für den Beweis der Existenz wählen wir $(x_i)_{i=1}^m$ mit $|\varphi(x')| \leq c \max_{i=1,\dots,m} p_{x_i}(x')$ für alle $x' \in E'$. Insbesondere gilt $\varphi(x') = \varphi(y')$, falls $\langle x', x_i\rangle = \langle y', x_i\rangle$ für alle $i = 1, \dots, m$ erfüllt ist. Somit definiert

$$\psi\big(\langle x', x_1\rangle, \dots, \langle x', x_m\rangle\big) := \varphi(x')$$

eine lineare Funktion $\psi$ auf einem Unterraum von $\mathbb{K}^m$. Es gibt also $(a_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{K}$ mit

$$\varphi(x') = \psi\big(\langle x', x_1\rangle, \dots, \langle x', x_m\rangle\big) = \sum_{i=1}^m a_i \langle x', x_i\rangle = \Big\langle x', \sum\nolimits_{i=1}^m a_i x_i \Big\rangle$$

für alle $x' \in E'$. Wir haben die Behauptung mit $x := \sum_{i=1}^m a_i x_i$ bewiesen.