Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 30.04.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 1

> If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
>
> — John von Neumann (1903–1957)

1. *Zum Satz von Baire.* (10)

(a) Zeige, dass sich der vollständige normierte Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ als abzählbare Vereinigung von Mengen $M_j \subset \mathbb{R}$ schreiben läßt, welche dicht sind aber keine innere Punkte haben. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Baire? (1)

(b) Zeige, dass $\mathbb{Q}$ nicht der abzählbare Durchschnitt offener Mengen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist. (1)

(c) Beweise, dass in einem vollständigen metrischen Raum jede nichtleere offene Menge fett ist. (4)

(d) Sei (M, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum mit der Eigenschaft, dass $x \in M$ stets im Abschluss der Menge $M \setminus \{x\}$ liegt. Zeige: M ist überabzählbar. (4)

2. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume und T ein linearer Operator von X nach Y. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen: (6)

(i) T ist beschränkt, also $T \in \mathcal{L}(X, Y)$;

(ii) T ist stetig in 0;

(iii) T ist Lipschitz-stetig.

Weise zudem nach, dass die Identität

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \inf\{L \geq 0 \mid \|Tx\|_Y \leq L\|x\|_X \quad \forall x \in X\}$$

und die Abschätzung

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

gilt.

3.$\star$ Zwei Metriken auf einer nichtleeren Menge heißen *äquivalent*, wenn sie für Folgen denselben Konvergenzbegriff induzieren. (4$\star$)

Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Aussage: Sind d_1 und d_2 äquivalente Metriken auf einem Vektorraum X, dann ist eine Folge von Vektoren in X genau dann eine Cauchyfolge bezüglich d_1, wenn sie eine Cauchyfolge bezüglich d_2 ist.