Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 30.04.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16

Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 1

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

— John von Neumann (1903–1957)

1. *Zum Satz von Baire.* (10)

(a) Zeige, dass sich der vollständige normierte Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ als abzählbare Vereinigung von Mengen $M_j \subset \mathbb{R}$ schreiben läßt, welche dicht sind aber keine innere Punkte haben. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Baire? (1)

Lösung: Es gilt $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \dot\cup \mathbb{Q}$. Diese Mengen sind natürlich nicht *nirgends dicht*, da ihr Abschluss innere Punkte enthält. Daher widerspricht dies nicht dem Satz von Baire.

(b) Zeige, dass $\mathbb{Q}$ nicht der abzählbare Durchschnitt offener Mengen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist. (1)

Lösung: Angenommen

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k, \quad U_k \subset \mathbb{R} \text{ offen.}$$

Insbesondere gilt dann $\mathbb{Q} \subset U_k$, weshalb U_k^c also abgeschlossen und nirgends dicht ist. Daraus folgt

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k^c,$$

was dem Satz von Baire widerspricht, denn dann wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und damit auch $\mathbb{R}$ mager.

(c) Beweise, dass in einem vollständigen metrischen Raum jede nichtleere offene Menge fett ist. (4)

Lösung: Angenommen, es existiert eine nichtleere offene Menge O in einem vollständigen metrischen Raum, welche sich als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen schreiben lässt, also

$$O = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k, \quad \mathring{\overline{R}}_k = \emptyset.$$

Dann definieren wir

$$U_k := O \setminus \overline{R}_k \quad \text{und} \quad W_k := \overline{O}^c \cup U_k.$$

Die Mengen W_k sind offen und dicht. Damit hat man wegen

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_k = \overline{O}^c \cup \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (O \setminus \overline{R}_k) \right) = \overline{O}^c$$

einen Widerspruch zum Satz von Baire, weil $\overline{O}^c$ definitiv nicht dicht ist.

(d) Sei (M, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum mit der Eigenschaft, dass $x \in M$ stets im Abschluss der Menge $M \setminus \{x\}$ liegt. Zeige: M ist überabzählbar. (4)

Lösung: Für jeden Punkt $x \in M$ ist die Menge $O_x := \{x\}^c$ nach Voraussetzung offen und dicht. Wäre nun M höchstens abzählbar, dann wäre wegen des Satzes von Baire

$$\emptyset = \bigcap_{x \in M} O_x$$

dicht, was nicht der Fall sein kann, da M als nichtleer vorausgesetzt war.

2. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume und T ein linearer Operator von X nach Y. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen: (6)

(i) T ist beschränkt, also $T \in \mathcal{L}(X, Y)$;

(ii) T ist stetig in 0;

(iii) T ist Lipschitz-stetig.

Weise zudem nach, dass die Identität

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \inf \{L \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq L\|x\|_X \quad \forall x \in X\}$$

und die Abschätzung

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

gilt.

Lösung:
(i)⇒(iii) Es gelte

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y \leq C.$$

Daraus folgt für alle $x \in X$

$$\left\| T\frac{x}{\|x\|_X} \right\|_Y \leq C \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \tag{*}$$

Setzt man nun $x = x_1 - x_2$ ein, erhält man die Lipschitz-Stetigkeit.
(iii)⇒(ii) Trivial.
(ii)⇒(i) Wegen der Stetigkeit in 0 existiert eine Kugel $B_X(0, \varepsilon)$ mit $TB_X(0, \varepsilon) \subset B_Y(0, 1)$. Nach Reskalierung bedeutet das aber

$$\|Tx\|_Y \leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\|_X.$$

Die beiden verbliebenen Aussagen sind nach den üblichen Konventionen trivial für unbeschränkte lineare Operatoren. Die Gleichung (*) zeigt damit sofort die Abschätung und die Ungleichung

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \geq \inf \{L \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq L\|x\|_X \quad \forall x \in X\} =: R.$$

Die Abschätzung $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq R + \varepsilon$ ist aber für jedes $\varepsilon > 0$ klar. Daraus folgt die Gleichheit.

3.$\star$ Zwei Metriken auf einer nichtleeren Menge heißen *äquivalent*, wenn sie für Folgen denselben Konvergenzbegriff induzieren. (4$\star$)

Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Aussage: Sind d_1 und d_2 äquivalente Metriken auf einem Vektorraum X, dann ist eine Folge von Vektoren in X genau dann eine Cauchyfolge bezüglich d_1, wenn sie eine Cauchyfolge bezüglich d_2 ist.

Lösung: Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}$ über sich selbst, und versehen ihn zum einen mit der euklidischen Metrik d_1, zum anderen mit der Metrik d_2, welche sich aus einer stereographischen Projektion wie folgt ergibt:

$$d_2(x, y) := \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^2},$$

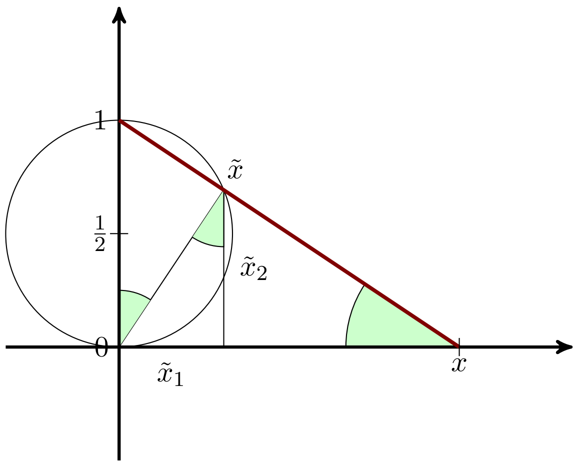

Abbildung 1: Stereographische Projektion von x auf den Punkt $\tilde{x}$, welcher auf dem auf der x-Achse sitzenden Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ liegt.

wobei wir für einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ die stereographische Projektion $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ über

$$\tilde{x}_1 = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \tilde{x}_2 = \frac{x^2}{1+x^2}$$

berechnen. In der Grafik 1 wird die stereographische Projektion veranschaulicht.
Da die stereographische Projektion $\mathbb{R}$ bijektiv auf den Kreis ohne den Nordpol abbildet, ist durch d_2 auch wirklich eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben. Ebenso einfach sieht man, dass d_1 und d_2 denselben Konvergenzbegriff für Folgen induzieren. Damit sind d_1 und d_2 äquivalent.
Allerdings ist die Folge $(k)_{k \in \mathbb{N}}$ bezüglich d_2 eine Cauchyfolge, während sie in $(\mathbb{R}, d_1)$ unbeschränkt und damit keine Cauchyfolge ist.