Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 07.05.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 2

"I am about to say a bad word about applied mathematicians, but, believe me, I mean it in a genuinely humble way. They are sloppy."

— Paul Richard Halmos (1916–2006), im Interview zu Donald J. Albers

4. *Zur absoluten Konvergenz.* (6)

(a) Zeige, dass ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn absolut konvergente Reihen konvergent sind, d.h. wenn für Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X folgende Implikation gilt: (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k \text{ existiert.}$$

(b) Eine konvergente Reihe nennt man *unbedingt konvergent*, wenn auch jede Umordnung der Reihe gegen denselben Grenzwert konvergiert. (2)

Gib ein Beispiel dafür an, dass in einem Banachraum absolute Konvergenz und unbedingte Konvergenz nicht dasselbe zu sein brauchen.

5. *Zum Satz von der offenen Abbildung.* (3)

(a) Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Zeige: $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. (2)

(b) Sei X ein Vektorraum, welcher mit den Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ ein Banachraum wird. Zeige, dass dann aus (1)

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \qquad \forall x \in X$$

für ein $C > 0$ die Äquivalenz beider Normen folgt.

6. *Über lineare Operatoren.* (6)

(a) Seien X ein normierter Vektorraum und Y ein Banachraum. Zudem sei U ein dichter Untervektorraum von X und $T \in \mathcal{L}(U, Y)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Operator $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$, welcher T fortsetzt. (3)

(b) Sei X ein normierter Vektorraum. Zeige, dass es keine Operatoren T und S in $\mathcal{L}(X)$ gibt, welche die Gleichung $TS - ST = I$ erfüllen. (2)

Hinweis: Sonst gilt $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

(c) Zeige, dass ein beschränkter linearer Operator nicht notwendigerweise abgeschlossenes Bild hat. (1)