UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 07.05.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16

Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 2

"I am about to say a bad word about applied mathematicians, but, believe me, I mean it in a genuinely humble way. They are sloppy."

— Paul Richard Halmos (1916–2006), im Interview zu Donald J. Albers

4. *Zur absoluten Konvergenz.* (6)

(a) Zeige, dass ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn absolut konvergente Reihen konvergent sind, d.h. wenn für Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X folgende Implikation gilt: (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k \text{ existiert.}$$

Lösung: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$$

gegeben. Definiere

$$s_N := \sum_{k=1}^{N} x_k.$$

Dann gilt mit $N > M$

$$\|s_N - s_M\| = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} x_k \right\| \leq \sum_{k=M+1}^{N} \|x_k\| \to 0 \qquad (N, M \to \infty).$$

Also ist $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit existiert $\lim_{N\to\infty} s_N$.

Für die umgekehrte Richtung sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Es genügt zu zeigen, dass (x_k) entlang irgendeiner Teilfolge konvergiert. Nach Übergang auf eine Teilfolge dürfen wir

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

annehmen. Nun gilt aber

$$\left\| \sum_{k=2}^{N} (x_k - x_{k-1}) \right\| \leq \sum_{k=2}^{N} \|x_k - x_{k-1}\| \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1,$$

woraus die Existenz von

$$s := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} (x_k - x_{k-1}) = \lim_{N\to\infty} (x_N - x_1) = \lim_{N\to\infty} x_N - x_1$$

und damit insbesondere die Konvergenz der Folge (x_k) folgt.

(b) Eine konvergente Reihe nennt man *unbedingt konvergent*, wenn auch jede Umordnung der Reihe gegen denselben Grenzwert konvergiert. (2)

Gib ein Beispiel dafür an, dass in einem Banachraum absolute Konvergenz und unbedingte Konvergenz nicht dasselbe zu sein brauchen.

Lösung: Wähle $X = \ell^2$ und betrachte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k.$$

Diese Reihe ist unbedingt konvergent, aber nicht absolut konvergent.

5. *Zum Satz von der offenen Abbildung.* (3)

(a) Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Zeige: $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. (2)

Lösung: Nach dem Satz von der offenen Abbildung gilt also $B(0, \varepsilon) \subset TB(0, 1)$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$. Damit ergibt sich direkt $T^{-1}B(0, \varepsilon) \subset B(0, 1)$, also $\|T^{-1}y\| \leq 1$ solange $\|y\| < \varepsilon$. Damit gilt $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

(b) Sei X ein Vektorraum, welcher mit den Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ ein Banachraum wird. (1)
Zeige, dass dann aus

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \qquad \forall x \in X$$

für ein $C > 0$ die Äquivalenz beider Normen folgt.

Lösung: Die Abbildung $\tilde{I}\colon (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ mit $x \mapsto x$ ist offenbar bijektiv, linear und nach Voraussetzung beschränkt. Damit ist nach dem vorigen Aufgabenteil auch $\tilde{I}^{-1}\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ beschränkt. Es gilt also die Abschätzung

$$\|x\|_2 \leq \tilde{I}^{-1}\|x\|_1 \qquad \forall x \in X.$$

6. *Über lineare Operatoren.* (6)

(a) Seien X ein normierter Vektorraum und Y ein Banachraum. Zudem sei U ein dichter Untervektorraum von X und $T \in \mathcal{L}(U, Y)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Operator $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$, welcher T fortsetzt. (3)

Lösung: Sei $x \in X$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in U mit $x_k \to x$. Nun gilt

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(U,Y)}\|x_n - x_m\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Da Y vollständig ist, konvergiert die $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und wir setzen $\tilde{T}x := \lim_{n\to\infty} Tx_n$.

Wohlgestelltheit: Sei (y_k) eine weitere Folge in U mit $y_k \to x$. Dann gilt

$$\|\tilde{T}x - Ty_k\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Ty_k\| \leq \|T\| \left(\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + \|x - y_k\|\right) \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Damit folgt insbesondere, dass $\tilde{T}$ eine Fortsetzung von T ist.

Linearität: Folgt aus der einfachen Rechnung

$$\tilde{T}(\alpha x + y) = \lim_{k\to\infty} T(\alpha x_k + y_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} Tx_k + \lim_{k\to\infty} Ty_k = \alpha\tilde{T}x + \tilde{T}y.$$

Stetigkeit: Es gilt

$$\|\tilde{T}x\| = \lim_{k\to\infty} \|Tx_k\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|T\|\|x_k\| = \|T\|\|x\|.$$

Eindeutigkeit: Die Eindeutigkeit einer solchen Fortsetzung ist klar, da $\tilde{T}$ insbesondere folgenstetig zu sein hat und damit so definiert werden muss.

(b) Sei X ein normierter Vektorraum. Zeige, dass es keine Operatoren T und S in $\mathcal{L}(X)$ gibt, welche die Gleichung $TS - ST = I$ erfüllen. (2)
Hinweis: Sonst gilt $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

Lösung: Angenommen, es existieren solche Operatoren. Dann kann man einfach durch vollständige Induktion zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$ gilt. Multipliziere dazu die Formel mit S und ersetze das ST am Anfang dann unter Verwendung der Gleichung durch $TS - I$.

Einerseits sieht man nun, dass $S^n \neq 0$ sein muss für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt

$$n\|S^{n-1}\| \leq \|TS^n\| + \|S^nT\| \leq 2\|T\|\|S\|\|S^{n-1}\|,$$

also erhält man nach Division durch S^{n-1} den Widerspruch

$$n \leq 2\|T\|\|S\| < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c) Zeige, dass ein beschränkter linearer Operator nicht notwendigerweise abgeschlossenes Bild hat. (1)

Lösung: Wir betrachten den normierten Vektorraum der reellen Nullfolgen mit Supremumsnorm $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Der Operator $T \in \mathcal{L}(c_0)$ definiert durch

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\tfrac{1}{k}x_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

hat aber offenbar dichtes Bild, welches aber nicht mit dem Gesamtraum übereinstimmt. Damit kann das Bild nicht abgeschlossen sein.