Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 14.05.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 3

„Alle Pädagogen sind sich darin einig: man muss vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.“

— Felix Klein (1849–1929)

7. Sei V ein komplexer Vektorraum und $\mathfrak{a}\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Statt $\mathfrak{a}(x,x)$ scheiben wir auch kürzer $\mathfrak{a}(x)$. (5)

(a) Zeige die *Polarisationsgleichung* (2)

$$4\mathfrak{a}(x,y) = \sum_{\varepsilon \in \{1,-1,i,-i\}} \varepsilon \mathfrak{a}(x + \varepsilon y).$$

(b) Sei $\mathfrak{a}(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ *symmetrisch* ist, also dass $\mathfrak{a}(x,y) = \overline{\mathfrak{a}(y,x)}$ für alle $x, y \in V$ gilt. (2)

(c) Sei $\mathfrak{a}(x) = 0$ für alle $x \in V$. Zeige, dass dann $\mathfrak{a} = 0$. (1)

8. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Genau dann kommt die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt auf X, wenn sie die *Parallelogrammgleichung* (5)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (x, y \in X)$$

erfüllt. Zeige diese Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Hinweis: $\mathbb{Q}$-Linearität folgt leicht aus Additivität. Betrachte den Ausdruck

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \varepsilon \Big(\big(\|x_1 + x_2 + \varepsilon y\|^2 + \|x_1 - x_2 + \varepsilon y\|^2\big) + \big(\|x_1 + x_2 + \varepsilon y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + \varepsilon y\|^2\big) \Big)$$

und verwende die Parallelogrammgleichung.

9. Sei $(H, (\cdot\,|\,\cdot))$ ein Hilbertraum. (6+4⋆)

(a) Sei $C \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Zeige, dass P_C genau dann linear ist, wenn C zudem ein Unterraum ist. (2)

(b) Sei C der positive Kegel in $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, also $C = \{f \in H : f \geq 0 \text{ fast überall}\}$. Zeige: C ist konvex und abgeschlossen in H. Bestimme P_C. (2)

(c) Sei C die Menge der geraden Funktionen in $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, also (2)

$$C = \{f \in H : f(x) = f(-x) \text{ fast überall in } x\}.$$

Zeige: C ist konvex und abgeschlossen in H. Bestimme P_C.

(d)⋆ Sei $C \subset H$ abgeschlossen und konvex. Zeige: P_C ist Lipschitz-stetig, genauer (4⋆)

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in H).$$

Hinweis: Verwende die Charakterisierung $\operatorname{Re}\big(x - P_C(x)\,|\,y - P_C(x)\big) \leq 0$ für $y \in C$.