Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 14.05.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16

Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 3

„Alle Pädagogen sind sich darin einig: man muss vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.“

— Felix Klein (1849–1929)

7. Sei V ein komplexer Vektorraum und $\mathfrak{a}\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Statt $\mathfrak{a}(x, x)$ scheiben wir auch kürzer $\mathfrak{a}(x)$. (5)

(a) Zeige die *Polarisationsgleichung* (2)

$$4\mathfrak{a}(x, y) = \sum_{\varepsilon \in \{1,-1,i,-i\}} \varepsilon \mathfrak{a}(x + \varepsilon y).$$

Lösung: Die Gleichung kann anhand elementarer Rechnung verifiziert werden.

(b) Sei $\mathfrak{a}(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ *symmetrisch* ist, also dass $\mathfrak{a}(x, y) = \overline{\mathfrak{a}(y, x)}$ für alle $x, y \in V$ gilt. (2)

Lösung: Mittels der Polarisationsgleichung und elementarer Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned} 4\overline{\mathfrak{a}(y, x)} &= \mathfrak{a}(y + x) - \mathfrak{a}(y - x) - i\mathfrak{a}(y + ix) + i\mathfrak{a}(y - ix) \\ &= \mathfrak{a}(x + y) - \mathfrak{a}(x - y) - i(-i)i\mathfrak{a}(ix + y) + ii(-i)\mathfrak{a}(-ix + y) \\ &= \mathfrak{a}(x + y) - \mathfrak{a}(x - y) + i\mathfrak{a}(x + iy) - i\mathfrak{a}(x - iy) \\ &= 4\mathfrak{a}(x, y). \end{aligned}$$

(c) Sei $\mathfrak{a}(x) = 0$ für alle $x \in V$. Zeige, dass dann $\mathfrak{a} = 0$. (1)

Lösung: Da in der Polarisationsgleichung nur solche symmetrischen Terme vorkommen, ist offenbar $\mathfrak{a}(x, y) = 0$ für alle $x, y \in V$.

8. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Genau dann kommt die Norm $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt auf X, wenn sie die *Parallelogrammgleichung* (5)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (x, y \in X)$$

erfüllt. Zeige diese Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Hinweis: $\mathbb{Q}$-Linearität folgt leicht aus Additivität. Betrachte den Ausdruck

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \varepsilon \Big((\|x_1 + x_2 + \varepsilon y\|^2 + \|x_1 - x_2 + \varepsilon y\|^2) + (\|x_1 + x_2 + \varepsilon y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + \varepsilon y\|^2) \Big)$$

und verwende die Parallelogrammgleichung.

Lösung: Die Richtung von links nach rechts ist trivial. Wir nehmen also an, dass wir eine Norm haben, welche die Parallelogrammgleichung erfüllt. Ein zugehöriges Skalarprodukt muss wegen der Polarisationsgleichung für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Gleichung

$$(x \,|\, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

erfüllen. Nun ist nachzuweisen, dass diese Gleichung tatsächlich ein Skalarprodukt definiert. Klar ist bereits, dass dann $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm ist.
Es verbleibt also die Eigenschaften eines Skalarprodukts zu prüfen.
Positivität und Definitheit. Klar.
Symmetrie. Klar.
Additivität in der ersten Komponente. Der im Hinweis gegebene Ausdruck ist – gegenüber der ausgegebenen Variante geeignet abgeändert – einerseits gleich zu

$$\begin{aligned}&2\|x_1 + x_2 + y\|^2 - 2\|x_1 + x_2 - y\|^2 \\ &\quad + \|x_1 - x_2 + y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 - x_2 - y\|^2 - \|-x_1 + x_2 - y\|^2 = 8(x_1 + x_2 \,|\, y),\end{aligned}$$

andererseits ergibt Anwendung der Parallelogrammgleichung auf die geklammerten Ausdrücke in der Summe

$$\begin{aligned}8(x_1 + x_2 \,|\, y) &= 2 \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}} \varepsilon\Big(\|x_1 + \varepsilon y\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_2 + \varepsilon y\|^2 + \|x_1\|^2\Big) \\ &= 8(x_1 \,|\, y) + 8(x_2 \,|\, y).\end{aligned}$$

Homogenität in der ersten Komponente. Es ist direkt anhand der Polarisationsgleichung zu sehen, dass $(-x \,|\, y) = -(x \,|\, y)$ und $(0 \,|\, y) = 0$ gilt. Aus der Additivität folgt nun induktiv sofort $\mathbb{Z}$-Homogenität, also

$$(\lambda x \,|\, y) = \lambda(x \,|\, y) \qquad (\lambda \in \mathbb{Z},\ x, y \in X).$$

Daraus ist einfach die $\mathbb{Q}$-Homogenität abzulesen, denn

$$(\tfrac{p}{q}x \,|\, y) = \tfrac{p}{q}q(\tfrac{1}{q}x \,|\, y) = \tfrac{p}{q}(x \,|\, y).$$

Nun sind aber die beiden Funktionen $t \mapsto (tx \,|\, y)$ und $t \mapsto t(x \,|\, y)$ offenbar stetig in $\mathbb{R}$ und stimmen auf $\mathbb{Q}$ überein. Dies impliziert die $\mathbb{R}$-Homogenität.
Es wurde nachgewiesen, dass die mittels der Polarisationsgleichung definierte Abbildung sesquilinear und positiv definit ist. Insgesamt ist sie demnach ein zu der die Parallelogrammgleichung erfüllenden Norm gehörendes Skalarprodukt.

9. Sei $(H, (\cdot \,|\, \cdot))$ ein Hilbertraum. (6+4⋆)

(a) Sei $C \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Zeige, dass P_C genau dann linear ist, wenn C zudem ein Unterraum ist. (2)

Lösung: Wir schreiben im folgenden stets P statt P_C. Sei zuerst $U := C$ ein linearer Unterraum. Es gilt für $y \in U$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(\lambda x_1 + x_2 - (\lambda P x_1 + P x_2) \,|\, y - (\lambda P x_1 + P x_2)) \\ &\quad = \mathrm{Re}\Big(|\lambda|^2(x_1 - P x_1 \,|\, \tfrac{1}{\lambda}(y - P x_2) - P x_1)\Big) + \mathrm{Re}(x_2 - P x_2 \,|\, (y - \lambda P x_1) - P x_2) \leq 0.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $(y - \lambda P x_1)$ und $\frac{1}{\lambda}(y - P x_2)$ wieder in U liegen. Damit ist also wegen der Eindeutigkeit der besten Approximation

$$P(\lambda x_1 + x_2) = \lambda P x_1 + P x_2.$$

Also ist P linear.

Sei nun P linear, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x, y \in C$. Da C konvex ist und $Pz = z$ gilt für $z \in C$, folgt

$$P(\lambda x + y) = \lambda Px + Py = \lambda x + y \in C.$$

Also ist C ein linearer Unterraum.

(b) Sei C der positive Kegel in $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, also $C = \{f \in H : f \geq 0 \text{ fast überall}\}$. (2)
Zeige: C ist konvex und abgeschlossen in H. Bestimme P_C.

Lösung: Offenbar ist C konvex. Wir zeigen die Abgeschlossenheit. Sei dazu $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in C mit $f_k \to f$ in L^2. Nach Übergang auf eine Teilfolge können wir annehmen, dass $f_k \to f$ punktweise fast überall. Damit ist aber fast überall $f \geq 0$. Daher gilt $f \in C$ und C ist abgeschlossen in L^2.

Allgemeiner gilt folgende Form einer Umkehrung des Satzes von Lebesgue für $1 \leq p < \infty$: Konvergiert $f_k \to f$ in L^p, dann gibt es eine Teilfolge von (f_k), entlang der man eine Majorante in L^p und punktweise Konvergenz fast überall hat.

Es verbleibt die Projektion zu bestimmen. Wir vermuten $P_C f = f_p := (\operatorname{Re} f)\mathbb{1}_{[\operatorname{Re} f \geq 0]}$. Sei $h \in C$. Dann ist $g := h - f_p$ reell und es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(f - f_p \mid h - f_p) &= \operatorname{Re}\Big(\int_\Omega (f - f_p)\overline{g}\, \mathrm{d}\mu\Big) \\
&= \operatorname{Re}\Big(\int_\Omega \operatorname{Re} f \mathbb{1}_{[\operatorname{Re} f < 0]} g\, \mathrm{d}\mu\Big) \\
&\leq \operatorname{Re}\Big(\int_\Omega \operatorname{Re} f \mathbb{1}_{[\operatorname{Re} f < 0]} g \mathbb{1}_{[\operatorname{Re} f > h]}\, \mathrm{d}\mu\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir nachgerechnet, dass f_p tatsächlich die beste Approximation von f in C ist.

(c) Sei C die Menge der geraden Funktionen in $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, also (2)

$$C = \{f \in H : f(x) = f(-x) \text{ fast überall in } x\}.$$

Zeige: C ist konvex und abgeschlossen in H. Bestimme P_C.

Lösung: Konvexität von C ist offensichtlich, denn es handelt sich sogar um einen Unterraum. Die Abgeschlossenheit folgt wie zuvor aus der oben zitierten Form der Umkehrung des Satzes von Lebesgue.

Wir vermuten, dass die orthogonale Projektion durch

$$(P_C f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

gegeben ist. Wir bezeichnen für $f \in L^2$ mit f_s die L^2 Funktion $x \mapsto f(-x)$, womit sich vorausgegangene Zeile als $P_C f = \frac{1}{2}(f + f_s)$ schreiben lässt. Folgende Rechnung mit $h \in C$ beweist nun die Korrektheit unserer Vermutung:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\big(f - \tfrac{1}{2}(f + f_s) \mid h - \tfrac{1}{2}(f + f_s)\big) &= \operatorname{Re}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{2}((f - f_s)(\overline{g} - \tfrac{1}{2}(\overline{f} + \overline{f}_s)\Big) \\
&= \operatorname{Re}\Big(\tfrac{1}{4}(-|f|^2 + |f_s|^2 + f_s\overline{f} - f\overline{f}_s) + \tfrac{1}{2}(f\overline{g} - f_s\overline{g})\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Am Ende haben wir hier die mehrdimensionale Substitutionsregel verwendet, beispielsweise für die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\overline{g} = \int_{\mathbb{R}^d} f_s\overline{g}_s = \int_{\mathbb{R}^d} f_s\overline{g}.$$

(d)$\star$ Sei $C \subset H$ abgeschlossen und konvex. Zeige: P_C ist Lipschitz-stetig, genauer (4$\star$)

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \qquad (x_1, x_2 \in H).$$

Hinweis: Verwende die Charakterisierung $\operatorname{Re}\big(x - P_C(x) \mid y - P_C(x)\big) \leq 0$ für $y \in C$.

Lösung: Wir verwenden bei nachfolgender Rechnung geschickt die Charakterisierung der besten Approximation und schließlich die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|^2 &= \|P_C(x_1)\|^2 - \operatorname{Re}\big(P_C(x_1) \,|\, P_C(x_2)\big) + \|P_C(x_2)\|^2 - \operatorname{Re}\big(P_C(x_2) \,|\, P_C(x_1)\big) \\
&= \operatorname{Re}\big(P_C(x_1) \,|\, P_C(x_1) - P_C(x_2)\big) + \operatorname{Re}\big(P_C(x_2) \,|\, P_C(x_2) - P_C(x_1)\big) \\
&\le \operatorname{Re}\big(x_1 \,|\, P_C(x_1) - P_C(x_2)\big) + \operatorname{Re}\big(x_2 \,|\, P_C(x_2) - P_C(x_1)\big) \\
&= \operatorname{Re}\big(x_1 - x_2 \,|\, P_C(x_1) - P_C(x_2)\big) \\
&\le \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}
$$

Obiges zeigt, dass die orthogonale Projektion auf eine abgeschlossene, konvexe Menge eine Kontraktion ist – was anschaulich natürlich nicht weiter verwunderlich ist.