Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 19

Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 4

"Although I am almost illiterate mathematically, I grasped very early in life that any one who can count to ten can count upward indefinitely if he is fool enough to do so."

— Robertson Davis (1913–1995)

10. *Schwache Konvergenz im Hilbertraum.* (7)

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Hilbertraum H. Wir sagen (x_k) konvergiert schwach gegen x, wenn

$$(x_k \,|\, y) \to (x \,|\, y) \qquad \forall y \in H.$$

Man schreibt dann auch $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$.

(a) Zeige, dass der schwache Grenzwert eindeutig ist. (1)

Lösung: Sei (x_k) schwach konvergent gegen x und y. Dann gilt

$$(x - y \,|\, z) = \lim_{k\to\infty} (x_k - y \,|\, z) = 0$$

für alle $z \in H$, insbesondere für $z = x - y$. Also gilt $x = y$.

(b) Zeige, dass schwach konvergente Folgen beschränkt sind. (2)

Lösung: Wir definieren die beschränkten linearen Funktionale $\varphi_k(y) := (y \,|\, x_k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Nun existiert $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(y)$ für alle $y \in H$. Damit ist die Familie $\{\varphi_k(y)\}$ punktweise beschränkt und damit existiert nach dem Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit $C > 0$ mit $\|\varphi_k\| \le C$ gleichzeitig für alle $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt

$$\big|(y \,|\, x_k)\big| \le C\|y\|$$

für $y = x_k$, womit $\|x_k\| \le C$ folgt.

(c) Zeige, dass eine Folge (x_k) genau dann stark gegen x konvergiert, wenn sie schwach gegen x konvergiert und $\limsup_{k\to\infty} \|x_k\| \le \|x\|$ erfüllt. (2)

Lösung: Aus starker Konvergenz folgt die schwache Konvergenz direkt aus der Cauchy–Schwarz Ungleichung. Die zweite Bedingung ist klar wegen der Stetigkeit der Norm.

Es verbleibt also die andere Richtung zu zeigen. Es gilt aber

$$\limsup_{k\to\infty} \|x_k - x\|^2 = \limsup_{k\to\infty} \big(\|x_k\|^2 - (x_k \,|\, x) - (x \,|\, x_k) + \|x\|^2\big) = \limsup_{k\to\infty} \|x_k\|^2 - \|x\|^2 \le 0.$$

(d) Seien (y_k) und (x_k) Folgen in H. Es gelte $y_k \to y$ und $x_k \rightharpoonup x$. Zeige, dass dann auch $(x_k \,|\, y_k) \to (x \,|\, y)$ gilt. (1)

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\big|(x_k \,|\, y_k) - (x \,|\, y)\big| &= \big|(x_k \,|\, y_k) - (x_k \,|\, y) + (x_k \,|\, y) - (x \,|\, y)\big| \\ &\le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|\|y_k - y\| + \big|(x_k - x \,|\, y)\big| \to 0\end{aligned}$$

für $k \to \infty$ unter Verwendung der Beschränktheit schwach konvergenter Folgen.

(e) Zeige, dass es in ℓ^2 beschränkte Folgen ohne konvergente Teilfolge und schwach konvergente aber nicht konvergente Folgen gibt. (1)

Lösung: Es genügt ein und dasselbe Beispiel, nämlich die Folge (e_k). Wir sehen, dass $e_k \rightharpoonup 0$ in ℓ^2. Dazu genügt es anzumerken, dass die Folgenglieder einer ℓ^2 Folge gegen 0 konvergieren.

Andererseits ist die Folge (e_k) selbstverständlich in Norm durch 1 beschränkt. Angenommen, eine Teilfolge würde konvergieren. Diese Teilfolge konvergiert immer noch schwach gegen 0. Aber $1 = \limsup_{k\to\infty} \|e_{n_k}\| > 0$, womit die Teilfolge wegen Aufgabenteil (c) nicht konvergieren kann.

11. *Orthogonalität.* (6)
Sei H ein Hilbertraum und $U \subset H$ ein nichtleerer, abgeschlossener Unterraum. Die orthogonale Projektion auf U in H sei mit P_U bezeichnet.

(a) Es gilt $\operatorname{rg} P_U \perp \ker P_U$ und $H = \operatorname{rg} P_U \oplus \ker P_U$. (2)

Lösung: Wir wissen bereits, dass $P_U \in \mathcal{L}(H)$ liegt. Nach Definition ist klar, dass $U = \operatorname{rg} P_U$ gilt. Sei $x \in \ker P_U$. Da U ein Unterraum ist, gilt nun

$$\operatorname{Re}(x - P_U x \,|\, u) = \operatorname{Re} xu = 0 \qquad \forall u \in U = \operatorname{rg} P_U.$$

Also gilt $(x \,|\, u) = 0$ für alle $u \in U$, was aber nichts anderes als $\ker P_U \perp \operatorname{rg} P_U$ bedeutet.

Sei $x \in H$ beliebig und setze $x = P_U x + (I - P_U)x =: x_1 + x_2$. Es gilt nun $x_2 \in \ker P_U$, denn $P_U(I - P_U)x = 0$. Damit ist bereits klar, dass $H = \operatorname{rg} P_U + \ker P_U$ gilt. Sei $x \in \operatorname{rg} P_U \cap \ker P_U$. Dann gilt

$$x = P_U y = P_U P_U y = P_U x = 0.$$

Damit ist die Summe direkt. Zudem sieht man damit, dass $I - P_U$ die orthogonale Projektion auf $\ker P_U = U^\perp$ ist.

(b) Es sei $P \in \mathcal{L}(H)$ mit $P^2 = P$ und $\operatorname{rg} P = U$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: $P = P_U$, $(Px \,|\, y) = (x \,|\, Py)$ für alle $x, y \in H$, $\|P\| \le 1$. (4)

Lösung: Wir beweisen die Äquivalenz der drei Aussagen.

Die orthogonale Projektion ist selbstadjungiert. Es gilt nach dem Aufgabenteil (a)

$$(P_U x \,|\, y) = (P_U x \,|\, P_U y + (I - P_U)y) = (P_U x \,|\, P_U y) = (x \,|\, P_U y).$$

Eine selbstadjungierte Projektion ist kontraktiv. Es gilt

$$\|Px\|^2 = (Px \,|\, x) \le \|Px\|\|x\|.$$

Daraus folgt $\|P\| \le 1$.

Eine kontraktive Projektion ist bereits die orthogonale. Wir rechnen für $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \operatorname{rg} P$ und $x \in H$

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|^2 &= \|P(x - Px + \lambda u)\|^2 \\ &\le \|x - Px + \lambda u\|^2 = \|x - Px\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(x - Px \,|\, u) + \|\lambda u\|^2. \end{aligned}$$

Nun gilt also $-2\lambda \operatorname{Re}(x - Px \,|\, u) \le \|x - Px\|^2$, was nur im Fall $\operatorname{Re}(x - Px \,|\, u) = 0$ erfüllt sein kann. Damit ist P aber bereits die eindeutig bestimmte orthogonale Projektion.

12. *Hahn–Banach im Hilbertraum.* (6)

(a) Sei H ein Hilbertraum. Sei U ein abgeschlossener Unterraum von H und $x_0 \in H\backslash U$. Zeige, dass es $\varphi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ gibt, mit $\varphi|_U = 0$ und $\varphi(x_0) = 1$. (2)

Lösung: Wir vermuten, dass durch

$$\varphi(x) := \frac{((I - P_U)x \,|\, x_0)}{((I - P_U)x_0 \,|\, x_0)}$$

ein geeignetes Funktional angegeben ist. Wegen der vorigen Aufgabe gilt $((I-P_U)x_0 \,|\, x_0) = \|(I - P_U)x_0\|^2$, wobei letzteres nicht 0 sein kann, weil $x_0 \notin U$. Damit macht diese Definition Sinn und stellt offenbar auch ein beschränktes lineares Funktional dar. Es gilt aber offenbar $\varphi(u) = 0$ für $u \in U$, ebenso wie $\varphi(x_0) = 1$.

(b) Sei $A \subset H$ abgeschlossen und $B \subset H$ kompakt. Zeige: $A-B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ ist abgeschlossen. Zeige zudem, dass $A - B$ konvex ist, falls A und B konvex sind. (2)

Hinweis: Wir definieren Kompaktheit über Folgenkompaktheit, d.h. für einen metrischen Raum (X, d) ist $K \subset X$ nach Definition genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K besitzt.

Lösung: Sei (x_k) eine konvergente Folge in $A - B$. Es gilt also $x_k = a_k - b_k \to x$ für $k \to \infty$. Wegen der Kompaktheit von B, finden wir eine in B konvergernte Teilfolge, also $b_{n_k} \to b \in B$ für $k \to \infty$. Damit gilt aber $a_{n_k} = x_{n_k} + b_{n_k} \to x + b =: a \in A$, da A abgeschlossen ist. Ergo gilt $a - b = x \in A - B$, womit die Abgeschlossenheit von $A - B$ nachgewiesen ist.

Seien nun A und B konvex und $x = a_1 - b_1$, bzw. $y = a_2 - b_2$. Nun gilt mit $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(a_1 - b_1) + (1-\lambda)(a_2 - b_2) = \underbrace{\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2}_{\in A} - \underbrace{(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)}_{\in B} \in A - B.$$

(c) Seien A und B nichtleere, disjunkte, abgeschlossene und konvexe Teilmengen von H. Zudem sei B kompakt. Zeige: Es gibt $x^* \in H$ und $\varepsilon > 0$ so, dass (2)

$$(x^* \,|\, a) + \varepsilon \leq (x^* \,|\, b) \qquad \forall a \in A, b \in B.$$

Lösung: Wir setzen $C := A - B$ und erhalten mit dem vorausgegangenen Aufgabenteil, dass C abgeschlossen und konvex ist. Zudem ist C nichtleer und enthält wegen der Disjunktheit von A und B nicht die 0. Nach Vorlesung existiert nun aber $\varepsilon > 0$ und $x^* \in H$, mit

$$(x^* \,|\, c) + \varepsilon \leq 0 \qquad \forall c = a - b \in C.$$

Daraus folgt die Behauptung.