Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 28.05.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 10+4⋆

Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 5

"I hail a semi-group when I see one and I seem to see them everywhere! Friends have observed, however, that there are mathematical objects which are not semi-groups."

— Einar Hille (1894–1980)

13. *Orthogonalität, Orthonormalsysteme und -basen.* (10)

(a) Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ nichtleer. Zeige: $(M^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span} M}$. (3)

Lösung: Da $(M^\perp)^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist, der offenbar M enthält, gilt $U := \overline{\operatorname{span} M} \subset (M^\perp)^\perp$.

Sei nun $x \in (M^\perp)^\perp$. Dann gilt $x = x_0 + y$ mit $y \in \operatorname{rg} P_U = U$ und $x_0 \in \ker P_U \subset U^\perp \subset M^\perp$. Dabei ist die letzte Inklusion trivial und die vorletzte gilt wegen einer vorausgegangenen Übungsaufgabe. Nun folgt

$$\|x_0\|^2 = (x_0 + y \,|\, x_0) = (x \,|\, x_0) = 0.$$

Damit gilt $x = y \in U = \overline{\operatorname{span} M}$.

(b) Sei H ein Hilbertraum und (e_k) ein Orthonormalsystem in H. Zeige, dass (e_k) genau dann eine Orthonormalbasis von H ist, wenn (2)

$$\{x \in H : (x \,|\, e_k) = 0 \quad \forall k\} = \{0\}.$$

Lösung: Setze $M := \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Offenbar genügt es nun zu zeigen, dass (e_k) genau dann total ist, wenn $M^\perp = \{0\}$ gilt. Sei also (e_k) total. Dann gilt mit dem vorausgegangenen Aufgabenteil

$$M^\perp = ((M^\perp)^\perp)^\perp = \left(\overline{\operatorname{span} M}\right)^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

Umgekehrt sei nun $M^\perp = \{0\}$. Daraus folgt

$$\overline{\operatorname{span} M} = (M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

(c) Zeige, dass die Rademacher-Funktionen $r_n(t) := \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein Orthonormalsystem aber keine Orthonormalbasis in $L^2(0,1)$ sind. (2)

Lösung: Einfach zu sehen ist, dass die r_n normiert sind. Die paarweise Orthogonalität kann man wie folgt überprüfen. Sei $n > m$. Dann ist r_m auf den Intervallen $[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]$ für $k = 0, \dots, m$ jeweils konstant, während r_n dort gleichviele negative wie positive Anteile hat. Gegeneinander integriert erhält man also stets 0.

Es handelt sich um keine Orthonormalbasis, da die nichttriviale Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \\ -1 & \text{für } t \in [0, \frac{1}{4}) \text{ oder } t \in (\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

senkrecht auf allen r_n steht.

(d) Setze (3)

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und definiere für $j \in \mathbb{N}_0$ und $k = 0, \dots, 2^j - 1$ die Funktionen

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k).$$

Zeige, dass die konstante Funktion $\mathbf{1}$ zusammen mit den Funktionen $\psi_{j,k}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(0,1)$ bilden.
Hinweis: Definiere $F(t) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ für ein $f \in L^2(0,1)$, welches orthogonal zu all diesen Funktionen ist. Was läßt sich nun beispielsweise über $F(\frac{1}{2})$ sagen?

Lösung: Die Orthogonalität und die Normiertheit sieht man analog wie gerade eben. Wir nummerieren die entsprechend reskalierten Funktionen in geeigneter Weise durch, also $h_0 = \mathbf{1}$, $h_1 = \psi_{0,0}$, $h_2 = 2^{-1/2}\psi_{1,0}$, $h_3 = 2^{-1/2}\psi_{1,1}$, $h_4 = 2^{-1}\psi_{2,0}$, und so fort.

Sei f orthogonal zu allen h_j. Es genügt nun wegen (b) zu zeigen, dass dann $f = 0$ gilt. Definiere F wie im Hinweis. Dann gilt wegen $\big(f \,|\, h_0\big) = 0$, dass $F(0) = F(1) = 0$ ist. Wegen $2F(\frac{1}{2}) = F(1) + \big(f \,|\, h_1\big)$ folgt nun $F(\frac{1}{2}) = 0$. Allgemeiner erhält man nun induktiv für $k = 0, \dots, 2^m - 1$

$$2F\big((2k+1)2^{-(m+1)}\big) = F\big((k+1)2^{-m}\big) + F\big(k2^{-m}\big) + \big(f \,|\, 2^{-m/2}\psi_{m,k}\big) = 0.$$

Insgesamt gilt also, dass die stetige Funktion F an allen Stellen der Form $k2^{-m}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ und $k = 0, \dots, 2^m - 1$ verschwindet. Ergo gilt $F = 0$. Insbesondere folgt daraus aber $f = 0$.

14.$\star$ Sei $H = L^2(0,1)$. Gibt es eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to H$ mit folgenden Eigenschaften? (4$\star$)

(i) $\gamma(0) = 0$ und $\|\gamma(1)\| = 1$;
(ii) $(\gamma(b) - \gamma(a)) \perp (\gamma(d) - \gamma(c))$ falls $0 \le a < b \le c < d \le 1$;
(iii) $\overline{\operatorname{span}\gamma([0,1])} = H$.

Lösung: Ja, so eine Kurve gibt es!
Setze $\gamma(t) := \mathbb{1}_{[0,t]}$. Dann sind (i) und (ii) offenbar erfüllt. Zudem ist γ stetig, denn

$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|^2 = \left|\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{1}\,\mathrm{d}s\right| = |t_1 - t_2|.$$

Es verbleibt nun zu zeigen, dass $U := \operatorname{span}\gamma([0,1])$ dicht in H ist. Klar ist, dass Intervallindikatoren in U enthalten sind. Aus der Maßtheorie wissen wir aber, dass die Intervalle in $[0,1]$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger der Borel σ-Algebra von $[0,1]$ sind.
Mit einem Beweis nach dem Prinzip der guten Mengen können wir nun zeigen, dass beliebige messbare Indikatoren in H durch Funktionen in U approximiert werden können. Es genügt dazu zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathscr{A} := \{A \in \mathscr{B}([0,1]) : \forall\varepsilon > 0 \exists I \subset [0,1] \text{ mit } \mu(A\Delta I) < \varepsilon, \\ \text{wobei } I \text{ Vereinigung endlich vieler Intervalle ist}\} \end{aligned}$$

eine σ-Algebra ist. Das ist aber einfach zu überprüfen.