Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 18.06.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 30+10⋆

# Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 6

"As for everything else, so for a mathematical theory: beauty can be perceived but not explained."

— Arthur Cayley (1821–1895)

**15.** Sei $H$ ein Hilbertraum und $U, V$ abgeschlossene Unterräume von $H$. Zeige: Genau dann kommutieren $P_U$ und $P_V$, wenn auch $P_U P_V$ eine orthogonale Projektion ist; in diesem Fall gilt $P_U P_V = P_V P_U = P_{U\cap V}$. (4)

**Lösung:** Wir nehmen zuerst an, dass $P_U$ und $P_V$ kommutieren. Dann gilt

$$P_V P_U P_V = P_V P_U = P_U P_V.$$

Damit folgt $P_U P_V x = P_V P_U x \in U \cap V$. Sei $y \in U \cap V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x - P_U P_V x \,|\, y - P_U P_V x) &= (x \,|\, y) - (x \,|\, P_U P_V x) - (P_U P_V x \,|\, y) + (P_U P_V x \,|\, P_U P_V x)\\ &= (x \,|\, y) - (x \,|\, P_U P_V x) - (x \,|\, y) + (x \,|\, P_U P_V x) = 0.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die zweite Charakterisierung aus Aufgabe 11 (b) verwendet. Damit ist nach Definition $P_U P_V = P_V P_U = P_{U\cap V}$.
Für die verbliebene Richtung nehmen wir an, dass $P_U P_V$ eine orthogonale Projektion ist. Wieder unter Verwendung von Aufgabe 11 (b) erhalten wir für beliebige $z \in H$

$$(P_U P_V x \,|\, z) = (x \,|\, P_U P_V z) = (P_V P_U x \,|\, z).$$

Damit kommutieren $P_U$ und $P_V$.

**16.** *Fourierreihen.* (12)

(a) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ 1-periodisch. Zeige: Ist die formale Fourierreihe von $f$ durch $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikt}$ gegeben, dann hat $f'$ die formale Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi ikc_k e^{2\pi ikt}$. (2)

**Lösung:** Sei $k \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}c_k = (f \,|\, e_k)_{L^2} &= \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2\pi ik} f(t)e^{-2\pi ikt}\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi ik}\int_0^1 f'(t)e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2\pi ik}c_k',\end{aligned}$$

wobei $c_k'$ den $k$-ten Fourierkoeffizienten von $f'$ bezeichnet. Der erste Term verschwindet, weil $f$ 1-periodisch ist. Zudem gilt

$$c_0' = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)\big|_0^1 = 0 = 2\pi i0c_0.$$

Insgesamt haben wir also die Identität

$$c_k' = 2\pi ikc_k$$

nachgewiesen, was zu zeigen war.

(b) Berechne die formale Fourierreihe der Funktion $f(t) = \frac{1}{4}\pi^2(1-2t)^2$! (4)

**Lösung:** Diese Funktion ist stetig differenzierbar und 1-periodisch. Daher gilt für $f'(t) = \pi^2(2t-1)$ und $k \neq 0$

$$c_k' = \int_0^1 \pi^2(2t-1)e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{\pi^2}{2\pi ik}(2t-1)e^{-2\pi ikt}\Big|_0^1 + \frac{\pi^2}{\pi ik}\int_0^1 e^{-2\pi ikt}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{ik} + 0.$$

Wir können den vorigen Aufgabenteil anwenden und erhalten für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi ik}c_k' = \frac{1}{2k^2}.$$

Zudem gilt

$$c_0 = \int_0^1 \frac{1}{4}\pi^2(2t-1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi^2\frac{1}{6}(2t-1)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\pi^2.$$

Damit ist die formale Fourierreihe durch

$$\frac{1}{12}\pi^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{2k^2}e^{2\pi ikt}$$

gegeben.

(c) Wir nehmen in diesem Aufgabenteil an, dass wir bereits wüßten, dass die formale Fourierreihe aus Aufgabenteil (b) gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Weise damit die Gleichheit (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

nach!

**Lösung:** Konvergiert die Fourierreihe aus dem vorigen Aufgabenteil gleichmässig, so gilt unter anderem

$$\frac{1}{4}\pi^2 = f(0) = \frac{1}{12}\pi^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{2k^2},$$

oder gleichbedeutend

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{12}\pi^2 = \frac{1}{6}\pi^2.$$

(d) Man will für das Polynom $p(t) = t^{11}$ ein Polynom $q$ höchstens fünften Grades finden, welches den Ausdruck (4)

$$\int_0^1 \left|p(t) - q(t) - 2e^t\right|^2 \mathrm{d}t$$

minimiert. Ist dieses Optimierungsproblem wohlgestellt und eindeutig lösbar? Falls ja, beschreibe ein Verfahren, welches die Lösung $q$ bestimmt.

**Lösung:** Definiere $f(t) = p(t) - 2e^t$. Diese Funktion kann offenbar als Element vom Hilbertraum $L^2(0,1)$ verstanden werden. Zudem ist der von den Polynomen bis zu fünftem Grad aufgespannte Unterraum $U$ in $L^2(0,1)$ endlichdimensional (genauer gesagt 6-dimensional). Daher ist $U$ insbesondere abgeschlossen. Die Minimierungsaufgabe ist äquivalent dazu den Ausdruck

$$\|f - q\|_{L^2}^2$$

für $q \in U$ zu minimieren. Die eindeutige Lösung für das Optimierungsproblem ist also durch $P_U f$ gegeben.

Die konkrete Berechnung kann wie folgt vorgenommen werden: man orthogonalisiert die Monome bis zu fünftem Grad mittels Gram–Schmidt; die Projektion auf dieses endlichdimensionale ONS kann dann durch die Bestimmung der sechs Fourierkoeffizienten bezüglich dieses ONS angegeben werden.

**17.** *Der Vollständigkeit halber...* (6)

(a) Beweise ohne Zuhilfenahme der Maßtheorie die Vollständigkeit von $\ell^2$. (4)

**Lösung:** Es sei $(x^{(n)})$ eine Cauchy-Folge in $\ell^2$. Zu zeigen ist, dass diese in $\ell^2$ auch konvergiert.

Grenzwertkandidat: Es gilt

$$\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| \leq \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_{\ell^2} \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Daher liegt komponentenweise eine Cauchy-Folge vor. Der Grenzwertkandidat ist daher die Folge $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wobei

$$x_k := \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}.$$

Zulässigkeit: Wir zeigen, dass $x \in \ell^2$ ist. Das folgt aus

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left|x_k^{(n)}\right|^2 \leq \limsup_{n\to\infty} \left\|x^{(n)}\right\|_{\ell^2}^2 < \infty,$$

denn Cauchy-Folgen sind beschränkt.

Konvergenz: Es verbleibt noch die Konvergenz in $\ell^2$ nachzuweisen. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $M$ groß genug, dass

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_{\ell^2} < \varepsilon \qquad (n, m \geq M).$$

Dann gilt für $n \geq M$

$$\sum_{k=1}^{N} \left|x_k^{(n)} - x_k\right|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^2 \leq \limsup_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^2 \leq \varepsilon.$$

Dies rechtfertigt den Grenzwertübergang $N \to \infty$, und man erhält

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_{\ell^2} = 0.$$

(b) Zeige, dass $\ell^\infty$ nicht separabel ist. (2)

**Lösung:** Definiere für $A \subset \mathbb{N}$ die beschränkte Folge

$$x(A) := (\mathbb{1}_A(1), \mathbb{1}_A(2), \dots).$$

Seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{N}$ beliebig mit $A_1 \neq A_2$. Dann gilt

$$\|x(A_1) - x(A_2)\|_\infty \geq 1.$$

Die $\frac{1}{2}$-Umgebungen von $x(A_1)$ und $x(A_2)$ in $\ell^\infty$ sind also disjunkt. Da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist und eine in $\ell^\infty$ dichte Menge in der Umgebung einer jeden durch eine solche Teilmenge induzierten Folge einen Punkt besitzen muss, kann $\ell^\infty$ nicht separabel sein.

**18.** Sei $H$ ein Hilbertraum und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $H$. (4)

(a) Zeige, dass $(e_k)$ genau dann eine Orthonormalbasis von $H$ ist, wenn jeder Untervektorraum von $H$, welcher $(e_k)$ enthält, dicht in $H$ ist. (2)

**Lösung:** Eine Orthonormalbasis hat nach Definition einen linearen Aufspann, der dicht ist. Somit ist natürlich auch ein dieser den Aufspann enthaltender Unterraum dicht.

Die andere Richtung erhält man aus der Beobachtung, dass

$$(e_k) \subset \overline{\operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}} = H.$$

(b) Zeige, dass $(e_k)$ genau dann eine Orthonormalbasis von $H$ ist, wenn (2)

$$(x \mid y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_k)(e_k \mid y)$$

für alle $x, y \in H$ gilt.

**Lösung:** Gilt diese Gleichung, dann folgt im Fall $x = y$ die Identität

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \big|(x \mid e_k)\big|^2.$$

Gilt also für einen Vektor $(x \mid e_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt $x = 0$. Nach Aufgabe 13 (b) folgt, dass $(e_k)$ eine Orthonormalbasis ist.

Sei für die umgekehrte Richtung $(e_k)$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung und der Parsevalschen Gleichung, dass

$$\mathfrak{a}(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_k)(e_k \mid y) \leq \|x\| \|y\| < \infty$$

eine symmetrische Sesquilinearform ist. Da diese auf der Diagonalen mit dem Skalarprodukt übereinstimmt, also

$$\mathfrak{a}(x, x) = \|x\|^2 = (x \mid x) \qquad (x \in H)$$

gilt, folgt wegen der Polarisationsgleichung sofort $\mathfrak{a}(x, y) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in H$.

**19.** *Zur Hilbertraumdimension.* (10)

(a) Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ zwei isomorphe normierte Räume. Zeige, dass $X_1$ genau dann separabel/vollständig ist, wenn $X_2$ separabel/vollständig ist. Ein normierter Raum heißt dabei *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. (2)

**Lösung:** Sei $J \colon X_1 \to X_2$ ein Isomorphismus, also $J \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ bijektiv mit $J^{-1} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$. Es genügt wegen der Symmetrie in der Aussage zu zeigen, dass wenn $X_1$ separabel/vollständig ist, dies auch für $X_2$ gilt.

Sei also $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar und dicht in $X_1$. Dann ist auch $JD = \{Jx_n : n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar und dicht in $X_2$, was man wie folgt sieht: für $y \in X_2$ existiert $x \in X_1$ mit $Jx = y$; es gibt eine Folge $(x'_k)$ in $D$ mit $x'_k \to x$ in $X_1$; $Jx'_k \in JD$ und $Jx'_k \to Jx = y$ in $X_2$ wegen der Stetigkeit von $J$.

Sei $X_1$ vollständig und $(y_k)$ eine Cauchy-Folge in $X_2$. Dann definiert auch $x_k := J^{-1} y_k$ eine Cauchy-Folge, denn

$$\|x_n - x_m\|_{X_1} \leq \|J^{-1}\| \|y_n - y_m\|_{X_2} \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Diese besitzt in $X_1$ einen Grenzwert $x$. Nun gilt aber

$$y_k = Jx_k \to Jx =: y \qquad (k \to \infty).$$

Also ist $(y_k)$ in $X_2$ konvergent. Damit ist auch $X_2$ vollständig.

(b) Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Aussage: Sind zwei normierte Räume isometrisch isomorph, so ist der eine ein Hilbertraum genau dann, wenn es auch der andere ist. (1)

**Lösung:** Diese Aussage ist korrekt. Ist nämlich $J\colon X_1 \to X_2$ ein isometrischer Isomorphismus und ist $X_1$ darüber hinaus ein Hilbertraum, so definiert

$$(y_1 \,|\, y_2)_2 := (J^{-1}y_1 \,|\, J^{-1}y_2)_1$$

offenbar eine positiv definite, symmetrische Sesqusquilinearform. Die Vollständigkeit überträgt sich wegen des vorausgegangenen Aufgabenteils.

(c) Zeige, dass die Vektorraumdimension von $\ell^2$ nicht mit seiner Hilbertraumdimension übereinstimmt. (3)

**Lösung:** Wir wissen, dass $\ell^2$ insbesondere ein vollständiger metrischer Raum ist. Die Hilbertraumdimension von $\ell^2$ ist $\aleph_0$, da $(e_k)$ eine abzählbare Orthonormalbasis darstellt.

Offenbar ist $\ell^2$ unendlichdimensional. Andererseits muss wegen des Satzes von Baire die Vektorraumdimension von $\ell^2$ echt höhere Kardinalität als $\aleph_0$ besitzen. Zum Beweis nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall. Dann gilt also $\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\} = \ell^2$ mit einem linear unabhängigen System $(x_k)$. Nun enthält $A_n := \operatorname{span}\{x_k : 1 \leq k \leq n\}$ keinen inneren Punkt, da $\ell^2$ ansonsten endlichdimensional wäre. Zugleich ist aber $A_n$ als endlichdimensionaler Unterraum abgeschlossen. Aus der Identität

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \ell^2$$

folgt nun mittels Baire der Widerspruch. Damit muss eine Vektorraumbasis von $\ell^2$ höhere Kardinalität als $\aleph_0$ haben.

(d) Zeige, dass zwei Hilberträume mit Orthonormalbasen derselben Kardinalität stets isometrisch isomorph sind. (4)

**Lösung:** Sei $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Orthonormalbasis von $H_1$ und $(g_\beta)_{\beta \in J}$ eine Orthonormalbasis derselben Kardinalität von $H_2$. Die Bijektion zwischen den Indexmengen $I$ und $J$ sei durch $j$ bezeichnet. Definiere nun die lineare Abbildung

$$U\colon \operatorname{span}\{f_\alpha : \alpha \in I\} \to H_2, \quad f_\alpha \mapsto g_{j(\alpha)}.$$

Da $U$ isometrisch ist und $(f_\alpha)$ dicht in $H_1$ liegt, kann $U$ stetig zu $\tilde{U} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ fortgesetzt werden. Es ist wegen der Stetigkeit der Normen klar, dass $\tilde{U}$ isometrisch und damit injektiv ist. Offenbar liegt das Bild von $\tilde{U}$ dicht in $H_2$. Wegen des Satzes von der beschränkten Inversen genügt es nun zu zeigen, dass das Bild von $\tilde{U}$ abgeschlossen ist. Man kann jedoch genauso einfach direkt sehen, dass $\tilde{U}$ surjektiv ist.

(e) Gilt die Aussage des vorigen Aufgabenteils auch, wenn man „Orthonormalbasen" durch „Vektorraumbasen" ersetzt und dafür das „isometrisch" streicht?

*Hinweis:* Wir verwenden ZFC. Auf diesen Aufgabenteil werden keine Punkte vergeben, weil er unangemessen schwierig und im Rahmen der Vorlesung völlig irrelevant ist. Die vorgesehene Bearbeitung besteht in entsprechender Literaturrecherche.

**Lösung:** Nein, dann wird die Aussage falsch, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt. Wir vergleichen $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ und $\ell^2(\mathbb{R})$. Nach Vorlesung ist bekannt, dass $\ell^2(\mathbb{N})$ separabel ist, während dies für $\ell^2(\mathbb{R})$ nicht gilt. Nach dem ersten Aufgabenteil sind diese beiden Räume also nicht isomorph.

Damit wir tatsächlich ein Gegenbeispiel gefunden haben, verbleibt der Nachweis, dass die Vektorraumdimension von $\ell^2(\mathbb{N})$ und $\ell^2(\mathbb{R})$ übereinstimmen. Wir beweisen dazu, dass die

Vektorraumdimension von $\ell^2(\mathbb{N})$ mit $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ übereinstimmt. Die Behauptung folgt dann daraus, dass die Vektorraumdimension von $\ell^2(\mathbb{R})$ natürlich keine geringere Mächtigkeit hat, aber auch keine höhere. Letzteres sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}\left|\ell^2(\mathbb{R})\right| &\le \left|(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbb{N}}\right| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \\ &= |\{\mathbb{N}\to\{\mathbb{N}\to\{0,1\}\}\}| = |\{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\{0,1\}\}| = 2^{\aleph_0}.\end{aligned}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass ein linear unabhängiges System der Kardinalität $2^{\aleph_0}$ in $\ell^2(\mathbb{N})$ existiert. Konstruiere dazu eine Familie $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von Teilmengen der natürlichen Zahlen, welche $|N_{t_1}\cap N_{t_2}| < \infty$ falls $t_1 \ne t_2$ und $|N_t| = \infty$ für $t\in\mathbb{R}$ erfüllt. Dies kann durch eine geometrische Konstruktion über schiefe durch den Winkel indizierte Steifen der Breite 2 in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\subset\mathbb{R}^2$ erfolgen. Nun wird durch

$$x_t := \sum_{n\in N_t} 2^{-n} e_n$$

eine entsprechende Familie linear unabhängiger Vektoren in $\ell^2(\mathbb{N})$ definiert.

Entsprechende Literaturverweise zu diesem Thema sind:

## References


[Blo] *Meta. Update.* Letzter Zugriff: 2009-06-16. URL: http://theoreticalatlas.wordpress.com/2008/09/10/meta-update/.

[Bud71] J. R. Buddenhagen. "Classroom Notes: Subsets of a Countable Set". In: *Amer. Math. Monthly* 78.5 (1971), pp. 536–537. ISSN: 0002-9890.

[Lac73] H. Elton Lacey. "The Hamel dimension of any infinite dimensional separable Banach space is $c$". In: *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), p. 298. ISSN: 0002-9890.

[Pla] PlanetMath. *Dimension Formulae for Vector Spaces.* Version 22, letzter Zugriff: 2009-06-16. URL: http://planetmath.org/encyclopedia/DimensionFormulaeForVectorSpaces.html.

[Wik] Wikipedia. *Mächtigkeit.* Letzter Zugriff: 2009-06-16. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/M%C3%A4chtigkeit_(Mathematik).


**20.** Sei $(K,d)$ ein kompakter metrischer Raum. Mit $C(K)$ sei die Menge der stetigen Funktionen von $K$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnet. Es sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $C(K)$ gegeben, welche $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $x\in K$ und $n\in\mathbb{N}$ erfüllt. Zudem gelte, dass $f_n$ punktweise gegen eine stetige Funktion $f$ konvergiere. Zeige, dass $f_n \to f$ gleichmäßig in $K$ für $n\to\infty$. (4)

*Hinweis:* Der Konsequenz halber ist auch bei dieser Aufgabe wieder Folgenkompaktheit zu verwenden.

**Lösung:** Wir geben einen Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir also an, die Folge würde nicht gleichmäßig in $K$ konvergieren. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ Elemente $x_n\in K$ existieren mit $f(x_n) - f_n(x_n) > \varepsilon$. Es gilt wegen Folgenkompaktheit nach Teilfolge, dass $x_n \to x\in K$. Es gibt ein $N\in\mathbb{N}$ mit $f(x) - f_n(x) < \varepsilon/4$ für alle $n\ge N$. Wegen Stetigkeit und Monotonie gilt die Ungleichung

$$f(x) - f_n(x) < \varepsilon/2 \qquad (n\ge N)$$

auf einer offenen Umgebung $U$ von $x$. Wähle $N$ groß genug, dass auch $x_n\in U$ für $n\ge N$ gilt. Damit haben wir den Widerspruch

$$\varepsilon < f(x_N) - f_N(x_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$