Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 25.06.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 18+3⋆

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 7

"Then shalt thou count to three, no more, no less. Three shall be the number thou shalt count, and the number of the counting shall be three. Four shalt thou not count, neither count thou two, excepting that thou then proceed to three. Five is right out."

— Monty Python and the Holy Grail (1975)

21. *Fourierreihen.* (13)

(a) Zeige, dass die Abbildung (2)

$$\mathcal{F}\colon L^2(0,1) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto \big((f \mid e_k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

(b) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Zeige, dass dann (2)

$$S_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k t}$$

für $N \to \infty$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen eine Funktion $f \in C_{\mathrm{per}}[0,1]$ konvergiert, welche S_∞ als Fourierreihe hat.

(c) Bestimme mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe 16 den Wert von (3)

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

(d) Sei $f, g \in L^2_{\mathrm{per}}(0,1)$ mit $f(t) = g(t)(1 - e^{2\pi i t})$, und seien c_k die Fourierkoeffizienten von f. Zeige, dass dann $\sum_{k=-n}^{n} c_k \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. (3)

(e) Bestimme die Fourierreihe der Funktion $f(t) = \mathbb{1}_{(0,1/2]}(t)$ und untersuche deren punktweise Konvergenz. (3)

22. Wir suchen eine 1-periodische Lösung y der Differentialgleichung (2)

$$y^{(4)}(t) + y^{(2)}(t) + y(t) = \cos(2\pi t).$$

Löse dieses Problem über einen Fourierreihenansatz.

23. *Dirichlet- und Fejér-Kern.* (3+3⋆)

(a) Zeige für $t \in (0,1)$ die Identität (2)

$$D_n(t) := \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \overset{!}{=} \sum_{|k|\le n} e^{-2\pi i k t}.$$

Insbesondere kann D_n also an 0 bzw. 1 stetig durch den Wert $2n+1$ fortgesetzt werden.

(b) Sei $f \in C_{\mathrm{per}}[0,1]$ mit Fourierkoeffizienten c_k. Zeige für $t \in [0,1]$ (1)

$$(f * D_n)(t) := \int_0^1 f(t-s) D_n(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{2\pi i k t} =: (S_n f)(t).$$

(c)⋆ Definiere den Fejér-Kern für $t \in (0,1)$ durch (3⋆)

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\pi n t)}{\sin(\pi t)}\right)^2.$$

Sei $f \in C_{\mathrm{per}}[0,1]$ mit Fourierkoeffizienten c_k. Zeige für $t \in [0,1]$

$$(f * F_n)(t) := \int_0^1 f(t-s) F_n(s)\,\mathrm{d}s \stackrel{!}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-k}^{k} c_j e_j(t).$$