Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 25.06.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 18+3⋆

Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 7

"Then shalt thou count to three, no more, no less. Three shall be the number thou shalt count, and the number of the counting shall be three. Four shalt thou not count, neither count thou two, excepting that thou then proceed to three. Five is right out."

— Monty Python and the Holy Grail (1975)

21. *Fourierreihen.* (13)

(a) Zeige, dass die Abbildung (2)

$$\mathcal{F}\colon L^2(0,1) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto \big((f \mid e_k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass die (e_k) eine Orthonormalbasis von $L^2(0,1)$ sind. Damit ist die Abbildung $\mathcal{F}$ linear und injektiv. Wegen Korollar 4.9 ist $\mathcal{F}$ auch surjektiv, und wegen der Parsevalschen Gleichung ist $\mathcal{F}$ zudem isometrisch. Damit liegt insgesamt ein isometrischer Isomorphismus vor.

(b) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Zeige, dass dann (2)

$$S_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k t}$$

für $N \to \infty$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen eine Funktion $f \in C_{\text{per}}[0,1]$ konvergiert, welche S_∞ als Fourierreihe hat.

Lösung: Der Raum $C_{\text{per}}[0,1]$ ist versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum. Da $\|e_k\|_\infty \le 1$ gilt, folgt aus $(c_k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ die absolute Konvergenz von

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k =: f.$$

Insbesondere gilt $f \in C_{\text{per}}[0,1]$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz sind (c_k) tatsächlich die Fourierkoeffizienten von f.

(c) Bestimme mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe 16 den Wert von (3)

$$\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Lösung: Wir verwenden die Bezeichnungen aus Aufgabe 16, also $f(t) = \frac{1}{4}\pi^2(2t-1)^2$. Dann gilt

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{16}\pi^4 \int_0^1 (2t-1)^4 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}(2t-1)^5\big|_0^1 = \frac{1}{80}\pi^4.$$

Zudem gilt nun wegen der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{1}{80}\pi^4 = \frac{1}{144}\pi^4 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{4k^4}.$$

Nach Umformung gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 2\pi^4\Big(\frac{1}{80} - \frac{1}{144}\Big) = \frac{1}{90}\pi^4.$$

(d) Sei $f, g \in L^2_{\mathrm{per}}(0,1)$ mit $f(t) = g(t)(1 - e^{2\pi i t})$, und seien c_k die Fourierkoeffizienten von f. Zeige, dass dann $\sum_{k=-n}^{n} c_k \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. (3)

Lösung: Wir bezeichnen die Fourierkoeffizienten von g mit $(c_k(g))$. Dann gilt

$$c_k = (f \mid e_k) = \int_0^1 g(t)(1 - e^{2\pi i t})e^{-2\pi i k t}\,\mathrm{d}t = c_k(g) - c_{k-1}(g).$$

Nach dem ersten Aufgabenteil wissen wir, dass $(c_k(g))$ in $\ell^2(\mathbb{Z})$ liegt und damit insbesondere $c_k(g) \to 0$ für $|k| \to \infty$ gilt. Daraus folgt nun

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k = \sum_{k=-n}^{n} (c_k(g) - c_{k-1}(g)) = c_n(g) - c_{-n-1}(g) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(e) Bestimme die Fourierreihe der Funktion $f(t) = \mathbb{1}_{(0,1/2]}(t)$ und untersuche deren punktweise Konvergenz. (3)

Lösung: Wir bestimmen die Fourierkoeffizienten von f. Für $k \neq 0$ gilt

$$c_k = (f \mid e_k) = \int_0^{1/2} e^{-2\pi i k t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{\pi i k} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt $c_0 = \frac{1}{2}$. Damit sieht man sofort, dass die Fourierreihe

$$\frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi i(2k+1)} e^{2\pi i(2k+1)t}$$

an 0, 1 und $\frac{1}{2}$ jeweils gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert. Wir zeigen nun, dass die Fourierreihe ansonsten (also auf $[0,1] \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$) punktweise gegen f konvergiert. Sei t_0 eine solche Stelle. Wir untersuchen die Funktion $\tilde{f}(t) = f(t + t_0) - f(t_0)$ in $L^2_{\mathrm{per}}(0,1)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k &= \int_0^1 (f(t+t_0) - f(t_0))e^{-2\pi i k t}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{2\pi i k t_0} \int_0^1 f(t+t_0)e^{-2\pi i k(t+t_0)}\,\mathrm{d}t + f(t_0)\int_0^1 e^{-2\pi i k t}\,\mathrm{d}t = e^{2\pi i k t_0} c_k - f(t_0)\delta_{0k}.
\end{aligned}$$

Es genügt damit also zu zeigen, dass $\sum_{k=-n}^{n} \tilde{c}_k \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Denn dann konvergiert die Fourierreihe von $\tilde{f}$ in 0 gegen 0, ergo diejenige von f in t_0 gegen $f(t_0)$. Setzt man für $t \in (0,1)$

$$g(t) := \frac{\mathbb{1}_{(0,1/2]}(t+t_0) - \mathbb{1}_{(0,1/2]}(t_0)}{1 - e^{2\pi i t}}$$

und setzt g gegebenenfalls mit 0 zu einer 1-periodischen Funktion fort, dann verschwindet g in einer punktierten Umgebung von 1 bzw. 1. Außerhalb einer solchen Umgebung bleibt $(1 - e^{2\pi i t})$ echt wegvon 0, weswegen g also insgesamt beschränkt ist und damit als Element von $L^2_{\mathrm{per}}(0,1)$ aufgefasst werden kann. Eine Anwendung des vorausgegangenen Aufgabenteils auf $\tilde{f}$ und g ergibt nun die Behauptung.

Dieses Resultat kann man sich zunutze machen, um den Satz von Dirichlet über die punktweise Konvergenz der Fourierreihe stückweise stetig differenzierbarer normalisierter Funktionen zu beweisen. Darüber hinaus kann auch noch gezeigt werden, dass die Fourierreihe dort lokal gleichmäßig konvergiert, wo f lokal konstant ist.

22. Wir suchen eine 1-periodische Lösung y der Differentialgleichung (2)

$$y^{(4)}(t) + y^{(2)}(t) + y(t) = \cos(2\pi t).$$

Löse dieses Problem über einen Fourierreihenansatz.

Lösung: Eine Lösung obiger Gleichung liegt offenbar in $C^5_{\mathrm{per}}[0,1]$. Falls also y eine Lösung ist, dann konvergieren die Fourierreihen von y, $y^{(2)}$ und $y^{(4)}$ gleichmäßig. Wir bezeichnen die Folge der Fourierkoeffizienten von y mit (c_k). Wir setzen $g(t) = \cos(2\pi t)$. Dann hat g die (gleichmäßig konvergente) Fourierreihe

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi i 1 t} + \frac{1}{2}e^{2\pi i(-1)t}.$$

Daher gilt wegen Aufgabe 16 (a) und der Eindeutigkeit der Fourierreihenentwicklung

$$(2\pi i k)^4 c_k + (2\pi i k)^2 c_k + c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k \in \{-1,1\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mittels Umformung erhält man nun, dass offenbar

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{32\pi^4 - 8\pi^2 + 2} =: \alpha & \text{für } k \in \{-1,1\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gelten muss. Die in $L^2(0,1)$ eindeutig bestimmte Funktion mit diesen Fourierkoeffizienten ist $y(t) = 2\alpha\cos(2\pi t)$. Nachdem diese Funktion tatsächlich die Differentialgleichung löst, haben wir über diesen Ansatz eine eindeutige Lösung gefunden.

23. *Dirichlet- und Fejér-Kern.* (3+3⋆)

(a) Zeige für $t \in (0,1)$ die Identität (2)

$$D_n(t) := \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \overset{!}{=} \sum_{|k|\le n} e^{-2\pi i k t}.$$

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} &= \frac{e^{(2n+1)\pi i t} - e^{-(2n+1)\pi i t}}{e^{\pi i t} - e^{-\pi i t}} \\ &= \frac{e^{(2n+1)\pi i t}(1 - e^{-(2n+1)2\pi i t})}{e^{\pi i t}(1 - e^{-2\pi i t})} \\ &= e^{2n\pi i t}\sum_{k=0}^{2n} e^{-2\pi i k t} \\ &= \sum_{|k|\le n} e^{-2\pi i k t}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann D_n also an 0 bzw. 1 stetig durch den Wert $2n+1$ fortgesetzt werden.

(b) Sei $f \in C_{\mathrm{per}}[0,1]$ mit Fourierkoeffizienten c_k. Zeige für $t \in [0,1]$ (1)

$$(f * D_n)(t) := \int_0^1 f(t-s)D_n(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{|k|\le n} c_k e^{2\pi i k t} =: (S_n f)(t).$$

Lösung: Es gilt

$$
\begin{aligned}
(S_n f)(t) &= \sum_{|k|\le n} \Big(\int_0^1 f(s)e^{-2\pi iks}\,\mathrm{d}s\Big)e^{2\pi ikt} \\
&= \sum_{|k|\le n} \int_0^1 f(s+t)e^{-2\pi iks}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 f(t+s)D_n(-s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 f(t-s)D_n(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

(c)$\star$ Definiere den Fejér-Kern für $t \in (0,1)$ durch (3$\star$)

$$
F_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\pi nt)}{\sin(\pi t)}\right)^2.
$$

Sei $f \in C_{\text{per}}[0,1]$ mit Fourierkoeffizienten c_k. Zeige für $t \in [0,1]$

$$
(f * F_n)(t) := \int_0^1 f(t-s)F_n(s)\,\mathrm{d}s \overset{!}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k} c_j e_j(t).
$$

Lösung: Sei $t \in (0,1)$ fest. Definiere $\omega := e^{\pi it}$ und $z := \omega^2$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
nF_n(t) &= \frac{(\omega^n - \omega^{-n})^2}{(\omega - \omega^{-1})^2} \\
&= \frac{z}{(z-1)^2}\big((z^n - 1) + (z^{-n} - 1)\big) \\
&= \frac{z}{(z-1)^2}\left((z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k + (z^{-1}-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}\right) \\
&= \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{n-1}(z^{k+1} - z^{-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{2k+1}-1}{z^k(z-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k}\sum_{m=0}^{2k} z^m \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t).
\end{aligned}
$$

Letzte Gleichheit folgt aus der Rechnung im ersten Aufgabenteil. Insbesondere kann also auch F_n stetig nach 0 bzw. 1 fortgesetzt werden. Damit gilt

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(S_k f)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f * D_k)(t) = \left(f * \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k\right)(t) = (f * F_n)(t).
$$