Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 09.07.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16+4⋆

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 9

Die Beschäftigung mit der Mathematik, sage ich, ist das beste Mittel gegen die Kupidität.

— Thomas Mann (1875–1955), Der Zauberberg

Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich.

— Paul Möbius (1853–1907), Irrenarzt

28. *Zu den Sobolevräumen in einer Dimension.* (6+4⋆)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir betrachten der Übersichtlichkeit halber nur reellwertige Funktionen.

(a) Zeige, dass $C_c^1(I)$ dicht in $L^2(I)$ ist. Folgere daraus, dass die schwache Ableitung eindeutig ist. (2)

(b) Zeige, dass es ein $f \in C^1(0,1) \cap L^2(0,1)$ gibt, welches nicht in $H^1(0,1)$ liegt. (1)

(c) Sei $\psi \in C_c^1(I)$ mit $\int_I \psi = 1$. Zeige, dass für jedes $w \in C_c^1(I)$ ein $v \in C_c^1(I)$ existiert, welches (1)

$$v'(x) = w(x) - \psi(x) \int_I w(y)\,\mathrm{d}y$$

erfüllt.

(d) Sei $f \in H^1(I)$ mit $f' = 0$. Zeige, dass $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = c$ fast überall. (2)

(e)⋆ Sei $u \in H^1(I)$. Zeige, dass es ein eindeutiges $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ gibt, welches fast überall mit u übereinstimmt. Zeige zudem, dass dieses für alle $s, t \in I$ die Gleichung (3⋆)

$$\tilde{u}(t) - \tilde{u}(s) = \int_s^t u'(r)\,\mathrm{d}r$$

erfüllt.

(f)⋆ Sei $I = (0,1)$ und $f \in L^2(I)$. Zeige, dass die eindeutige schwache Lösung von (1⋆)

$$\begin{cases} u - u'' = f, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

bereits in $H^2(I)$ liegt.

29. *Zur Hilbertraum-Adjungierten.* (10)

Im folgenden seien H, K, L Hilberträume. Ein Operator $N \in \mathcal{L}(H)$ heißt normal, wenn $N^*N = NN^*$.

(a) Seien $S \in \mathcal{L}(H,K)$ und $T \in \mathcal{L}(K,L)$. Zeige: $(TS)^* = S^*T^*$. (1)

(b) Sei $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Zeige: T is genau dann invertierbar, wenn T^* invertierbar ist, und in diesem Fall gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. (2)

(c) Zeige, dass ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ genau dann normal ist, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in H$ gilt. (1)

(d) Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Zeige, T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $(Tx \,|\, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$. Gilt dies auch ohne die Forderung, dass H ein komplexer Hilbertraum ist? (1)

(e) Sei $T \in \mathcal{L}(H, K)$ isometrisch und surjektiv. Zeige: Dann existiert T^{-1}, $T^{-1} = T^*$ und es gilt $(Tx \,|\, Ty)_K = (x \,|\, y)_H$ für alle $x, y \in H$. (1)

(f) Zeige, dass ein normaler Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung (2)

$$\|T^{2^k}\|^2 = \|T^*T\|^{2^k}$$

erfüllt.

(g) Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt $(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{rg} T^*}$ und $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{rg} T}$. (2)