Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16+4⋆

Lösungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 9

Die Beschäftigung mit der Mathematik, sage ich, ist das beste Mittel gegen die Kupidität.

— Thomas Mann (1875–1955), Der Zauberberg

Die Mathematik ist dem Liebestrieb nicht abträglich.

— Paul Möbius (1853–1907), Irrenarzt

28. *Zu den Sobolevräumen in einer Dimension.* (6+4⋆)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir betrachten der Übersichtlichkeit halber nur reellwertige Funktionen.

(a) Zeige, dass $C^1_c(I)$ dicht in $L^2(I)$ ist. Folgere daraus, dass die schwache Ableitung eindeutig ist. (2)

Lösung: Es sei $I = (a, b)$, wobei wir $a = -\infty$ oder $b = \infty$ nicht ausschliessen. Es genügt nun, einen beliebigen Intervallindikator $\mathbb{1}_{[c,d]}$, wobei $[c, d] \subset (a, b)$ endlich ist, in $L^2(I)$ durch Funktionen in $C^1_c(I)$ zu approximieren. Denn dann kann ein Argument wie in Aufgabe 14 verwendet werden, um zu zeigen, dass die approximierbaren Indikatormengen alle Borel Teilmengen von I endlichen Maßes beinhalten. Etwas detaillierter zu diesem zweiten Schritt: Man kann sich wegen Stetigkeit des Maßes und mittels Ausschöpfen von $\mathbb{R}$ durch endliche Intervalle auf den Fall zurückziehen, dass die betreffende Menge eine Teilmenge eines beschränkten Intervalls $J \subset \mathbb{R}$ ist. Da die (beschränkten) Intervalle in J einerseits ein durchschnittsstabiler Erzeuger der Borel σ-Algebra von J sind und andererseits die in $L^2(J)$ approximierbaren Teilmengen eine diese Intervalle beinhaltende σ-Algebra darstellen, folgt damit die Behauptung.

Ersteren Approximationsschritt für Intervallindikatoren kann man zum Beispiel so durchführen, dass man links und rechts den Übergang zu Null mittels einer passend gewählten skalierten und verschobenen Version der stückweise kubischen Funktion

$$p(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2} & \text{für } -1 \le t \le 1, \\ 0 & \text{für } t \le -1, \\ 1 & \text{für } t \ge 1, \end{cases}$$

vornimmt, also etwa mit

$$g_n(t) = \begin{cases} p(n(t-c)) & \text{für } c - 1/n \le t \le c + 1/n, \\ 1 & \text{für } c + 1/n \le t \le d - 1/n, \\ p(-n(t-d)) & \text{für } d - 1/n \le t \le d + 1/n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition gilt $g_n \in C^1_c(I)$ für grosse n. Die Konvergenz dieser Folge ist leicht nachzurechnen.

Die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung ist dann klar, denn wenn für $g \in L^2(I)$ gilt, dass $\int_I gv = 0$ für alle $v \in C^1_c(I)$, folgt das wegen Dichtheit insbesondere für $v = g$.

(b) Zeige, dass es ein $f \in C^1(0,1) \cap L^2(0,1)$ gibt, welches nicht in $H^1(0,1)$ liegt. (1)

Lösung: Man betrachte zum Beispiel die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$. Dann gilt für die klassische Ableitung $f'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$. Wegen

$$\int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \infty$$

liegt f' nun nicht in $H^1(0,1)$. Dass klassische und schwache Ableitung übereinzustimmen haben, folgt hier aus deren Eindeutigkeit.

(c) Sei $\psi \in C^1_c(I)$ mit $\int_I \psi = 1$. Zeige, dass für jedes $w \in C^1_c(I)$ ein $v \in C^1_c(I)$ existiert, welches (1)

$$v'(x) = w(x) - \psi(x)\int_I w(y)\,\mathrm{d}y$$

erfüllt.

Lösung: Setze

$$g(x) = w(x) - \psi(x)\int_I w(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es gilt $g \in C^1_c(I)$. Zudem gilt

$$\int_I g(y)\,\mathrm{d}y$$

Sei $I = (a,b)$, möglicherweise unbeschränkt. Damit hat

$$v(x) := \int_a^x g(y)\,\mathrm{d}y$$

die gewünschten Eigenschaften.

(d) Sei $f \in H^1(I)$ mit $f' = 0$. Zeige, dass $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = c$ fast überall. (2)

Lösung: Es gilt insbesondere für v aus dem vorigen Aufgabenteil

$$0 = \int_I fv' = \int_I f(x)\Big(w(x) - \psi(x)\int_I w(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)w(x)\,\mathrm{d}x - \int_I cw(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $c = \int_I f\psi \in \mathbb{R}$. Es gilt also

$$\int_I (f-c)w = 0$$

für alle $w \in C^1_c(I)$, woraus nach Aufgabenteil (a) die Behauptung folgt.

(e)$\star$ Sei $u \in H^1(I)$. Zeige, dass es ein eindeutiges $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ gibt, welches fast überall mit u übereinstimmt. Zeige zudem, dass dieses für alle $s,t \in I$ die Gleichung (3$\star$)

$$\tilde{u}(t) - \tilde{u}(s) = \int_s^t u'(r)\,\mathrm{d}r$$

erfüllt.

Lösung: Sei $c \in I$ fixiert und $[c,d] \subset I$ ein beschränktes Intervall. Definiere

$$g(x) = \int_c^x u'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dann gilt wegen Fubini für alle $v \in C^1_c(c,d) \subset C^1_c(I)$

$$\begin{aligned}\int_c^d g(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_c^d\int_c^x u'(y)\,\mathrm{d}y v'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_c^d\int_y^d v'(x)\,\mathrm{d}x u'(y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\int_c^d v(y)u'(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Also ist u' nach Definition auch die schwache Ableitung von g in $L^2(c,d)$. Wegen dem vorausgegangenen Aufgabenteil ist also $u-g$ auf $[c,d]$ fast überall gleich einer Konstante C. Analog sieht man, dass die auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion g auch in $L^2(b,c)$ fast überall $u = g + C$ erfüllt. Nachdem sich $\mathbb{R}$ durch abzählbar vieler Intervalle der Form $[b,d]$ ausschöpfen lässt, simmt u also fast überall mit der stetigen Funktion $\tilde{u} = g + C$ überein. Damit ist auch $\tilde{u} \in H^1(I)$ und erfüllt

$$\tilde{u}(t) - \tilde{u}(s) = \int_s^t u'(r)\,\mathrm{d}r.$$

Die Eindeutigkeit von $\tilde{u}$ ist klar.

(f)$\star$ Sei $I = (0,1)$ und $f \in L^2(I)$. Zeige, dass die eindeutige schwache Lösung von (1$\star$)

$$\begin{cases} u - u'' = f, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

bereits in $H^2(I)$ liegt.

Lösung: Man sieht aus der Definition von schwacher Lösung, dass $u - f \in L^2(I)$ offenbar die schwache Ableitung von u' ist.

29. *Zur Hilbertraum-Adjungierten.* (10)

Im folgenden seien H, K, L Hilberträume. Ein Operator $N \in \mathcal{L}(H)$ heißt normal, wenn $N^*N = NN^*$.

(a) Seien $S \in \mathcal{L}(H,K)$ und $T \in \mathcal{L}(K,L)$. Zeige: $(TS)^* = S^*T^*$. (1)

Lösung: Einfach.

(b) Sei $T \in \mathcal{L}(H,K)$. Zeige: T is genau dann invertierbar, wenn T^* invertierbar ist, und in diesem Fall gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. (2)

Lösung: Wenn T invertierbar ist, dann folgt mit dem vorigen Aufgabenteil

$$I = I^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*.$$

Ist nun T^* invertierbar, so folgt wegen $T^{**} = T$ und dem bereits Nachgewiesenen die Invertierbarkeit von T.

(c) Zeige, dass ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ genau dann normal ist, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in H$ gilt. (1)

Lösung: Wir definieren $\mathfrak{a}(x,y) = (T^*Tx \,|\, y)$ und $\mathfrak{b}(x,y) = (TT^*x \,|\, y)$. Dabei handelt es sich um symmetrische Sesquilinearformen, welche auf der Diagonalen übereinstimmen. Wegen der Polarisationsgleichung gilt also $\mathfrak{a}(x,y) = \mathfrak{b}(x,y)$ für alle $x, y \in H$, also $TT^* = T^*T$.

(d) Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Zeige, T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $(Tx \,|\, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$. Gilt dies auch ohne die Forderung, dass H ein komplexer Hilbertraum ist? (1)

Lösung: Für einen selbstadjungierten Operator gilt

$$(Tx \,|\, x) = (x \,|\, T^*x) = \overline{(Tx \,|\, x)},$$

also $(Tx \,|\, x) \in \mathbb{R}$.

Für die andere Richtung definiere $\mathfrak{a}(x,y) := (Tx \,|\, y) - (T^*x \,|\, y)$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{a}(x) = \mathfrak{b}(x)$. Da die Polarisationsgleichung im komplexen Fall auch für nicht symmetrische Formen gilt, folgt $\mathfrak{a} = 0$ und damit die Behauptung.

Ohne die Forderung ist die Aussage natürlich nicht richtig. Wähle zum Beispiel

$$H = \mathbb{R}^2, \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nicht selbstadjungiert.

(e) Sei $T \in \mathcal{L}(H, K)$ isometrisch und surjektiv. Zeige: Dann existiert T^{-1}, $T^{-1} = T^*$ und es gilt $(Tx \mid Ty)_K = (x \mid y)_H$ für alle $x, y \in H$. (1)

Lösung: Nach Aufgabenteil (b) sind T und T^* invertierbar. Wegen Aufgabenteil (c) ist T normal. Definiere $\mathfrak{a}(x, y) = ((I - T^*T)x \mid y)$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{a}(x, x) = 0$. Wieder mit Polarisationsgleichung folgt $I = T^*T = TT^*$, also $T^{-1} = T^*$.

(f) Zeige, dass ein normaler Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung (2)

$$\|T^{2^k}\|^2 = \|T^*T\|^{2^k}$$

erfüllt.

Lösung: Es gilt einerseits $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$, denn $\|T^*\| = \|T\|$. Andererseits gilt

$$\|Tx\|^2 = (Tx \mid Tx) \leq \|T^*T\|\|x\|^2.$$

Insgesamt erhalten wir also $\|T\|^2 = \|T^*T\|$, im Folgenden durch (*) bezeichnet. Induktiv folgt nun

$$\left\|T^k\right\|^2 = \left\|T^{*k}T^k\right\| = \left\|(T^*T)^k\right\|.$$

Zudem gilt nach iterierter Anwendung von (*)

$$\left\|(T^*T)^{2^k}\right\| = \|T^*T\|^{2^k}.$$

(g) Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt $(\ker T)^\perp = \overline{\operatorname{rg} T^*}$ und $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{rg} T}$. (2)

Lösung: Sei $x \in \operatorname{rg} T^*$, also $x = T^*y$. Dann gilt

$$(z \mid x) = (Tz \mid y) = 0$$

für alle $z \in \ker T$. Es verbleibt noch zu zeigen, dass $(\ker T)^\perp \subset \overline{\operatorname{rg} T^*}$. Dazu genügt es zu zeigen, dass $(\operatorname{rg} T^*)^\perp \subset \ker T$. Wähle dazu $y \in (\operatorname{rg} T^*)^\perp$. Dann folgt

$$(Ty \mid z) = (y \mid T^*z) = 0$$

für alle $z \in H$, also $y \in \ker T$.