Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Besprechung: Donnerstag, 08.05.14
Gesamtpunktzahl: 30

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 1

Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater.

— Albert Einstein (1879–1955)

1. *Der Laplaceoperator in speziellen Koordinaten.* (10)

(a) Sei $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$ und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$. Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ **radial**, d.h. es gibt ein $\varphi\colon (r_1, r_2) \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \varphi(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Zeige, dass dann $u \in C^2(\Omega)$ genau dann wenn $\varphi \in C^2\big((r_1, r_2)\big)$, und dass in diesem Fall (4)

$$\Delta u(x) = \varphi''(|x|) + \frac{d-1}{|x|}\varphi'(|x|)$$

für alle $x \in \Omega$ gilt. Insbesondere ist dann also auch Δu radial.

(b) Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$ und $u \in C^2(\Omega)$. Sei $f\colon (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (6)

$$f(r, \vartheta) := u(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)).$$

Zeige, dass dann

$$\Delta u(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = f_{rr}(r,\vartheta) + \frac{f_r(r,\vartheta)}{r} + \frac{f_{\vartheta\vartheta}(r,\vartheta)}{r^2}.$$

2. *Radiale harmonische Funktionen.* (10)

(a) Sei $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und betrachte $E_d\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch (2)

$$E_d(x) := \begin{cases} |x| & \text{für } d = 1, \\ \log|x| & \text{für } d = 2, \\ |x|^{2-d} & \text{für } d \ge 3. \end{cases}$$

Zeige, dass E_d harmonisch ist.

(b) Sei $0 \le r_1 < r_2 < \infty$ und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$. Es sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch und radial. Zeige, dass es dann $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $u(x) = c_1 E_d(x) + c_2$. (3)
Hinweis: Dazu kann man 1.(a) verwenden und die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung lösen.

(c) Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$. Zeige, dass das konkrete Dirichletproblem (2)

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) & \\ -\Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } |x| = 1, \\ u(0) = 1 & \end{cases}$$

nicht lösbar ist.
Hinweis: Zeige zuerst, dass eine Lösung u radial sein muss. Verwende dann (b) und leite einen Widerspruch ab.

(d) Sei $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeige, dass es keine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ gibt mit $(\operatorname{Re} f)(z) = \log|z|$. (3)
Hinweis: Verwende die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen und folgere, dass $(\operatorname{Im} f)(x+iy) = \arctan(y/x)+c$ gelten müsste. Leite daraus einen Widerspruch ab.

3. Es sei $C_{\mathrm{per}}[0,2\pi] = \{u \in C[0,2\pi] : u(0) = u(2\pi)\}$ der Raum der periodischen stetigen Funktionen auf $[0,2\pi]$. Die (endlichen) Linearkombinationen der Funktionen in (10)

$$\{x \mapsto \sin(kx) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x \mapsto \cos(kx) : k \in \mathbb{N}_0\}$$

heißen **trigonometische Polynome** und sind in $C_{\mathrm{per}}[0,2\pi]$ enthalten.

(a) Zeige, dass $C_{\mathrm{per}}[0,2\pi]$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C[0,2\pi]$ ist. (1)

(b) Zeige, dass die trigonometrischen Polynome eine dichte Unteralgebra von $C_{\mathrm{per}}[0,2\pi]$ sind. (6)

(c) Zeige, dass $C_{\mathrm{per}}[0,2\pi]$ dicht in $L^2(0,2\pi)$ ist und folgere, dass auch die trigonometrischen Polynome dicht in $L^2(0,2\pi)$ sind. (3)