Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 03.07.14
Gesamtpunktzahl: 22

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 10

Die Mathematik kann nichts von ihrer Würde einbüßen, wenn sie als bloßes Objekt der Spekulation, als unanwendbar zur Auflösung praktischer Aufgaben betrachtet wird.

— Alexander von Humboldt (1769–1859)

1. Sei $1 < p < \infty$ und q sei der konjugierte Index zu p.

(a) Zeige, wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, dann gilt $f * g \in C_0(\mathbb{R}^d)$. (4)
Hinweis: Hölder-Ungleichung, Approximation durch Testfunktionen.

(b) Zeige, wenn $f \in L^p_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, dann gilt $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$. (2)

(c) Bestimme diejenigen $q \in [1, \infty]$, so dass die Newtonsche Fundamentallösung $E_d \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. (2)

(d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zudem sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Folgere mit den vorigen Aufgabenteilen, dass wenn $\Delta u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $p > d/2$, dann gilt $u \in C(\Omega)$. (2)

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$.

(a) Sei $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Zeige, dass $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $D_j(uv) = (D_j u)v + vD_j u$ für $j = 1, \ldots, d$. Stimmt die Aussage auch ohne die Forderung $u, v \in L^\infty(\Omega)$? (3)

(b) Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,p}_0(\Omega)$ mit $0 \leq |u| \leq |v|$. Zeige, dass $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$. (3)

3. Sei $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und $\Omega := B \setminus \{0\}$.

(a) Für $r \in (0,1)$ definiere (4)

$$h_r(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq r, \\ \frac{1}{\log r} \log |x| & \text{für } r < |x| \leq 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $h_r \in W^{1,2}(B) \cap C(\overline{B})$ für alle $r \in (0,1)$ und $h_r \to 0$ in $W^{1,2}(B)$ für $r \to 0+$.

(b) Sei $\phi \in \mathcal{D}(B)$. Zeige, dass $\phi|_\Omega \in W^{1,2}_0(\Omega)$ unabhängig davon ob $\phi(0) = 0$. (2)

http://abstrusegoose.com/500