# Lösungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 13

Calculus is the outcome of a dramatic intellectual struggle which has lasted for twenty-five hundred years.

— Richard Courant (1888–1972)

**1.** *$H^2$ Regularität im Gesamtraum.*
Sei $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ eine Lösung von $-\Delta u + u = f$ für ein $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(a) Zeige, dass $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$. (4)
*Hinweis:* Zeige zuerst $\|D_h u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2}$. Verwende dann dasselbe Kriterium wie in der Vorlesung dafür, dass die schwachen partiellen Ableitungen von $u$ in $H^1$ sind.

(b) Zeige, wenn $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$, dann gilt $u \in H^{2+m}(\mathbb{R}^d)$. (2)

**2.** *Die Helmholtz Gleichung.*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir betrachten das Problem

$$\text{(H)} \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{auf } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass es ein $\mu_0 > 0$ gibt, so dass (H) keine nichttriviale Lösung hat für alle $\lambda < \mu_0$. (2)

(b) Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von (H) für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $u \in C^\infty(\Omega)$. (2)
*Hinweis: Calderon–Zygmund, Iteration, Soboleveinbettung*

**Lösung:** Es genügt zu zeigen, dass $u$ lokal $C^\infty$ ist. Sei also $x \in \Omega$ und $B(x, 2\delta) \Subset \Omega$. Dann gibt es eine Folge von Bällen $(B_n)$ mit $B(x,\delta) \Subset B_{n+1} \Subset B_n \Subset B(x, 2\delta)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun induktiv, dass $u \in H^m(B_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Der Fall $m = 1$ ist klar. Sei also $u \in H^m(B_m)$ und $\alpha$ ein Multi-Index mit $|\alpha| = m - 1$. Dann folgt aus

$$\int_{B_m} \nabla u \nabla (D^\alpha \varphi) = \int_{B_m} \lambda u D^\alpha \varphi$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B_m)$, dass

$$\int_{B_m} \nabla (D^\alpha u) \nabla \varphi = \int_{B_m} \lambda (D^\alpha u) \varphi.$$

Also ist $\hat{u} := D^\alpha u$ eine Lösung von $-\Delta \hat{u} = \lambda \hat{u}$. Sei $\hat{w} := E * (\lambda \hat{u})$. Nach Calderon–Zygmund gilt $\hat{w} \in H^2(B_m)$ und $\Delta(\hat{w} + \hat{u}) = 0$. Also ist $\hat{w} + \hat{u} \in C^\infty(B_m)$ und damit $\hat{u} \in H^2(B_{m+1})$. Da dies für alle entsprechenden Multi-Indizes $\alpha$ gilt, folgt $u \in H^{|\alpha|+2}(B_{m+1}) = H^{m+1}(B_{m+1})$.

Aus obiger Induktion folgt also $u \in H^m(B(x,\delta))$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz ist also $u \in C^\infty(B(x,\delta))$. Da $x$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

Beachte: Die Randbedinungen haben in diesem Argument keine Rolle gespielt. Zudem ist dies ein rein lokales Argument. Wir werden also keine Aussage zur Randregularität von $u$ machen können. Verwendet man das Resultat von Calderon–Zygmund in der Form $\Delta u = f$ mit $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$ impliziert $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$, vereinfacht sich das Argument entsprechend.

(c) Wir nehmen nun usätzlich an, dass $\Omega$ einen $C^{2+m}$ Rand hat für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ eine Lösung von (H) für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $u \in H^{2+m}(\Omega)$. Gib nun eine hinreichende Bedingung an $m$ an, die garantiert, dass $u \in C^2(\overline{\Omega})$. (2)

**3.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir verwenden nun Notation und Resultate aus §23. Wir wissen, dass die allgemeine elliptische Gleichung zweiter Ordnung $-Au = f$ unter der Bedingung $\operatorname{div} b \leq c_0$ oder $\operatorname{div} c \leq c_0$ für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung in $H^1_0(\Omega)$ hat.

(a) Zeige, dass der Lösungsoperator $R\colon f \mapsto u$ ein kompakter linearer Operator auf $L^2(\Omega)$ ist. (2)
*Hinweis:* Abgeschlossener Graph und kompakte Einbettung von Sobolevräumen.

(b) Wir nehmen an, dass $\lambda I - R$ nicht surjektiv ist für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeige, dass es dann $u \in H^1_0(\Omega)$ gibt mit $-Au = \frac{1}{\lambda} u$. (2)
*Hinweis:* Fredholm Alternative

**4.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in H^1(\Omega)$ mit $-\Delta u \in L^2(\Omega)$. Wir sagen, dass die Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$ (schwach), falls

$$\int_\Omega -\Delta u \varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$.

(a) Zeige, falls $\Omega$ eine beschränkte Menge mit $C^1$ Rand ist und $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, dann ist $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ schwach genau dann wenn $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ klassisch. (2)
*Hinweis:* Verwende die Fortsetzungseigenschaft und eine Greensche Formel.

**Lösung:** Sei $\Omega$ mit $C^1$ Rand und $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ (bei letzterem würde auch schon weniger reichen). Wir nehmen zuerst an, dass $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ klassisch, also $\nabla u(z) \cdot \nu(z) = 0$ für alle $z \in \partial\Omega$. Mit der ersten Greenschen Formel folgt

$$\int_\Omega \Delta u \varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (eigentlich sogar für alle $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$). Da die Testfunktionen dicht in $H^1(\mathbb{R}^d)$ sind, folgt dass obige Identität auch für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt. Damit ist also $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ im schwachen Sinn.

Umgekehrt, sei $-\int_\Omega \Delta u \varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi$ für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$. Es folgt also aus der Greenschen Formel, dass

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) \varphi \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Mit Stone–Weierstraß erhält man, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)|_{\partial\Omega}$ dicht in $C(\partial\Omega)$ ist. Also gilt $\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) g \, \mathrm{d}\sigma = 0$ für alle $g \in C(\partial\Omega)$, also insbesondere für $g = \nabla u \cdot \nu$. Es folgt, dass $\|\nabla u \cdot \nu\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$ ist, also $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = 0$ klassisch.

(b) Zeige, dass das Problem (4)

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{auf } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $\lambda > 0$ eine eindeutige Lösung in $H^1(\Omega)$ besitzt. Gilt das auch im Fall $\lambda = 0$?
*Hinweis:* Lax–Milgram

**Lösung:** Wir definieren $\mathfrak{a}\colon H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int_\Omega uv.$$

Dann ist $\mathfrak{a}$ offenbar eine stetige Bilinearform, welche koerziv ist für $\lambda > 0$. Sei also $f \in L^2(\Omega)$. Dann definiert $L(v) = \int_\Omega fv$ ein stetiges lineares Funktional auf $H^1(\Omega)$. Es folgt also aus Lax–Milgram, dass es ein eindeutiges $u \in H^1(\Omega)$ gibt mit $\mathfrak{a}(u,\varphi) = L(\varphi)$ für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$, also

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Wählt man $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ erhält man $-\Delta u = f - \lambda u$ (schwach). Anders formuliert gilt also

$$\int_\Omega -\Delta u \varphi = \int_\Omega (f - \lambda u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi$$

für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$. Demnach gilt $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ schwach.

Da umgekehrt eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ der Gleichung immer auch $\mathfrak{a}(u,v) = L(v)$ für alle $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt, ist die eindeutige Lösbarkeit gezeigt.

Für $\lambda = 0$ hat man keine eindeutige Lösbarkeit, denn alle konstanten Funktionen sind Lösungen für $f = 0$. Man kann aber das Argument mit Hilfe der zweiten Poincarégleichung und durch die Herausnahme der konstanten Funktionen entsprechend anpassen, wenn $\Omega$ Lipschitz ist.

http://spikedmath.com/264.html