Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Besprechung: Donnerstag, 24.07.14
Gesamtpunktzahl: 22

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 13

Calculus is the outcome of a dramatic intellectual struggle which has lasted for twenty-five hundred years.

— Richard Courant (1888–1972)

1. *H^2 Regularität im Gesamtraum.*
Sei $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ eine Lösung von $-\Delta u + u = f$ für ein $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(a) Zeige, dass $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$. (4)
Hinweis: Zeige zuerst $\|D_h u\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2}$. Verwende dann dasselbe Kriterium wie in der Vorlesung dafür, dass die schwachen partiellen Ableitungen von u in H^1 sind.

(b) Zeige, wenn $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$, dann gilt $u \in H^{2+m}(\mathbb{R}^d)$. (2)

2. *Die Helmholtz Gleichung.*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir betrachten das Problem

$$\text{(H)} \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{auf } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass es ein $\mu_0 > 0$ gibt, so dass (H) keine nichttriviale Lösung hat für alle $\lambda < \mu_0$. (2)

(b) Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von (H) für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $u \in C^\infty(\Omega)$. (2)
Hinweis: Calderon–Zygmund, Iteration, Soboleveinbettung

(c) Wir nehmen nun usätzlich an, dass Ω einen C^{2+m} Rand hat für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von (H) für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $u \in H^{2+m}(\Omega)$. Gib nun eine hinreichende Bedingung an m an, die garantiert, dass $u \in C^2(\overline{\Omega})$. (2)

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir verwenden nun Notation und Resultate aus §23. Wir wissen, dass die allgemeine elliptische Gleichung zweiter Ordnung $-Au = f$ unter der Bedingung $\operatorname{div} b \leq c_0$ oder $\operatorname{div} c \leq c_0$ für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung in $H_0^1(\Omega)$ hat.

(a) Zeige, dass der Lösungsoperator $R\colon f \mapsto u$ ein kompakter linearer Operator auf $L^2(\Omega)$ ist. (2)
Hinweis: Abgeschlossener Graph und kompakte Einbettung von Sobolevräumen.

(b) Wir nehmen an, dass $\lambda I - R$ nicht surjektiv ist für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeige, dass es dann $u \in H_0^1(\Omega)$ gibt mit $-Au = \frac{1}{\lambda} u$. (2)
Hinweis: Fredholm Alternative

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in H^1(\Omega)$ mit $-\Delta u \in L^2(\Omega)$. Wir sagen, dass die Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$ (schwach), falls

$$\int_\Omega -\Delta u \varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$.

(a) Zeige, falls Ω eine beschränkte Menge mit C^1 Rand ist und $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$, dann ist $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ schwach genau dann wenn $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ klassisch. (2)
Hinweis: Verwende die Fortsetzungseigenschaft und eine Greensche Formel.

(b) Zeige, dass das Problem (4)

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f & \text{auf } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $\lambda > 0$ eine eindeutige Lösung in $H^1(\Omega)$ besitzt. Gilt das auch im Fall $\lambda = 0$?
Hinweis: Lax–Milgram

`http://spikedmath.com/264.html`