Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 08.05.14
Gesamtpunktzahl: 20

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 2

Physics is mathematical not because we know so much about the physical world, but because we know so little.

— Bertrand Russel (1872–1970)

1. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zudem seien $u, v\colon \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten gegeben durch $u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = r^k\cos(k\vartheta)$ und $v(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = r^k\sin(k\vartheta)$. Dann sind u und v stetig fortsetzbar auf $\overline{\mathbb{D}}$ und diese Fortsetzungen sind harmonisch auf $\mathbb{D}$. (4)

Hinweis: $h(z) = z^k$ ist holomorph auf $\mathbb{D}$.

2. *Zum Divergenzsatz.* (16)

(a) Es sei $g\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(y) = a \cdot y + b$ mit $a \in \mathbb{R}^{d-1}$ und $b \in \mathbb{R}$. Zudem sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der zu g gehörige normale C^1-Graph. Es sei $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d-1})$. Zeige, dass (5)

$$\sigma\big(\{(y, g(y)) : y \in A\}\big) = \lambda_{d-1}(A) \cdot \left|\det\begin{pmatrix} e_1 & 1 & & \\ e_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ e_d & a_1 & \cdots & a_{d-1} \end{pmatrix}\right|$$

gilt, wobei $e_1, \dots, e_d$ die kanonische Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$ ist und die Determinante formal zu verstehen ist; man entwickle also bezüglich der ersten Spalte um einen Vektor in $\mathbb{R}^d$ zu erhalten. Argumentiere nun speziell für $d = 3$ und A ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{R}^2$ weshalb $\sigma\big(\{(y, g(y)) : y \in A\}\big)$ dem elementaren geometrischen Oberflächeninhalt entspricht.

(b) Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$ und σ das zu Ω gehörige Oberflächenmass. Berechne das Integral (4)

$$\int_{\partial\Omega} \Big(z_1^3 + 2z_2^2 + z_2\exp(z_3^{13}) + z_3 z_1^7 \sin(z_2)\Big)\,\mathrm{d}\sigma(z).$$

Hinweis: Was ist die äussere Normale $\nu(z)$ für $z \in \partial\Omega$? Verwende den Divergenzsatz!

(c) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine beliebige offene Menge und $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ ein Vektorfeld. Zudem sei der Träger von F kompakt enthalten in Ω. Zeige, dass (5)

$$\int_\Omega \operatorname{div} F = 0.$$

(d) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine beliebige offene Menge und $u \in C^1(\Omega)$. Zudem habe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ einen kompakten Träger, welcher in Ω enthalten sei. Zeige, dass für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ (2)

$$\int_\Omega (\partial_k u)\varphi = -\int_\Omega u\,\partial_k\varphi.$$