Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 3

Die Verführung, die von einem Beweis ausgeht, ist zu groß. Ihr erliegen die meisten, auf die Dauer alle. Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse.

— Galileo Galilei im *Leben des Galilei* von Bertolt Brecht (1898–1956)

1. *Glatte Funktionen.* (12)

(a) Es sei $\phi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch (4)

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\Bigl(\frac{1}{|x|^2-1}\Bigr) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Zeige, dass für alle offenen und nichtleeren $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht trivial ist. (1)

(c) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und K liege kompakt in Ω. Zeige, dass es ein $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ gibt mit $0 \leq f \leq 1$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in K$. (4)

Hinweis: Betrachte die Faltung einer geeigneten Indikatorfuntion mit ρ_n.

(d) Schauen Sie sich folgenden Preprint an. Was wird dort bewiesen? (1)

A. Tsionskiy and B. Tsionskiy. *A misleading example of a test function in space D from textbooks on generalized functions and distributions.* Zurückgezogen in der dritten Revision. 2012. arXiv: `1207.5274v2`.
URL: `http://arxiv.org/abs/1207.5274v2`

(e) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ wird **reell analytisch** genannt, falls $f \in C^\infty(\Omega)$ und wenn für alle $x \in \Omega$ ein offenes $U \subset \Omega$ mit $x \in U$ existiert, auf dem die Taylorreihe von f um x punktweise gegen f konvergiert. (2)

Gib eine Funktion in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ an, welche nicht reell analytisch ist.

2. Es sei $E\colon \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ das Newton'sche Potential wie in der Vorlesung. Zeige, dass $\partial_j\partial_k E \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ für alle $j,k \in \{1,\dots,d\}$ falls $d \geq 2$. (4)

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C(\Omega)$. Zeige, dass u genau dann die Mittelwerteigenschaft für Bälle hat, wenn u die Mittelwerteigenschaft für Sphären hat; d.h. zeige die Äquivalenz folgender beiden Aussagen: (4)

(i) Für alle $x \in \Omega$ und $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ gilt

$$⨍_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = u(x).$$

(ii) Für alle $x \in \Omega$ und $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ gilt

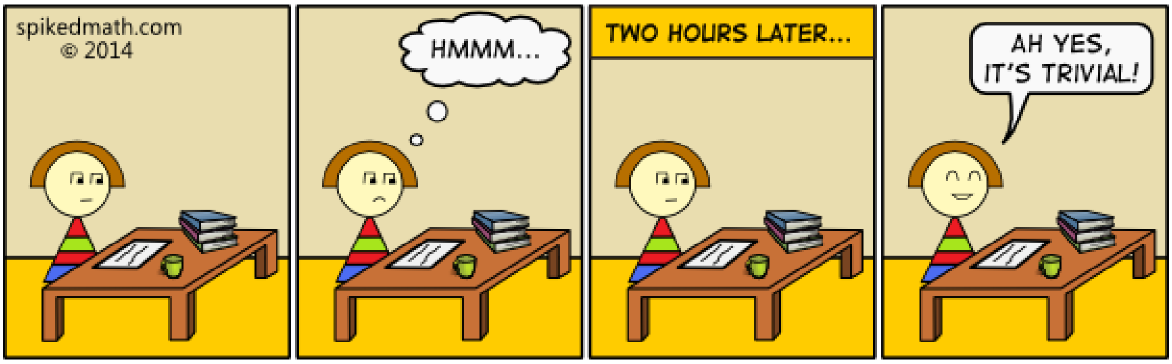
$$\fint_{\partial B(x,r)} u(z)\,\mathrm{d}\sigma(z) = u(x).$$

4. Es sei $\Omega = \mathbb{R} \times (0,1)$. Zeige, dass (4)

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

eine Lösung u hat, welche $u > 0$ auf Ω erfüllt. Kann man darüber hinaus auch noch fordern, dass $u(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$?

Hinweis: Trennung der Variablen.



`http://spikedmath.com/557.html`