Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Besprechung: Donnerstag, 22.05.14
Gesamtpunktzahl: 20

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 4

In re mathematica ars proponendi pluris facienda est quam solvendi.

(In der Mathematik ist die Kunst der Fragestellung wichtiger als die der Lösung.)

— Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918)

1. *Zur Konvergenz harmonischer Funktionen.* (6)

(a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}(\Omega)$ derart, dass (u_n) gleichmäßig auf Kompakta gegen ein $u \in C(\Omega)$ konvergiere. Zeige, dass $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. (2)

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend. Zudem seien $u_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $u_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere ein $x_0 \in \Omega$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) < \infty$. Zeige, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gleichmäßig auf Kompakta gegen ein $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ konvergiert. (2)

(c) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zudem sei $S \subset C(\partial\Omega)$ derart, dass die lineare Hülle von S dicht in $C(\partial\Omega)$ sei. Zeige, wenn das Dirichlet Problem (2)

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

lösbar ist für alle $g \in S$, dann ist es lösbar für alle $g \in C(\partial\Omega)$.

In der folgenden Aufgabe verwenden wir Multiindizes. Dazu sei $d \in \mathbb{N}$ fest. Ein Multiindex ist ein $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ in $\mathbb{N}_0^d$. Man definiert beispielsweise $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_d!$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ für $x \in \mathbb{R}^d$ und $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_d^{\alpha_d}}$.

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $M > 0$ derart, dass $|u(x)| \leq M$ für alle $x \in \Omega$. Zeige, dass für alle Multiindizes α und $x \in \Omega$ gilt (6)

$$|D^\alpha u(x)| \leq \Big(\frac{d|\alpha|}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}\Big)^{|\alpha|} M.$$

Hinweis: Verwende Induktion über $|\alpha|$ und verfahre wie in der Vorlesung.

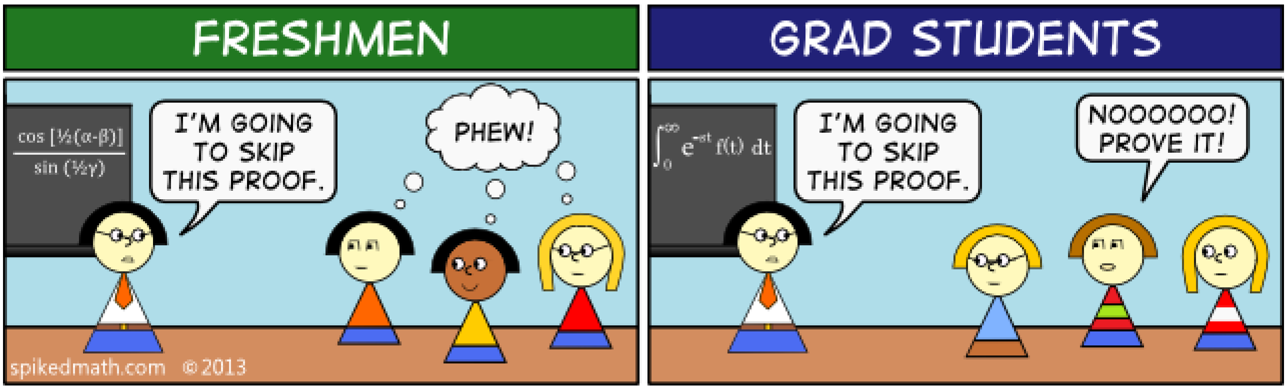
3. Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ und $R > 0$. Beweise die Zwiebelformel (3)

$$\int_{B(0,R)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^R \int_{\partial B(0,r)} f(z)\,\mathrm{d}\sigma(z)\,\mathrm{d}r.$$

Schreibe dazu das Integral auf der linken Seite als Integral über $B(0,1)$, differenziere dann auf beiden Seiten nach R und verwende den Satz von Gauß.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 3$ offen und $x_0 \in \Omega$. Es sei $u \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{x_0\})$ und es gebe ein $M > 0$ mit $|u(x)| \leq M$ für alle $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$. Zeige, dass dann u eine stetige Fortsetzung in $\mathcal{H}(\Omega)$ hat. Gilt dieses Resultat auch für $d = 1$ oder $d = 2$? (5)

Hinweis: Betrachte zuerst den Fall $\Omega = B(0,2)$, $x_0 = 0$, $u \equiv 0$ auf $\partial B(0,1)$. Für $\varepsilon > 0$ definiere $w(x) = u(x) - \varepsilon(|x|^{2-d} - 1)$. Verwende nun das elliptische Maximumsprinzip auf einem geeigneten Gebiet und betrachte $\varepsilon \to 0$.



http://spikedmath.com/540.html