Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Besprechung: Donnerstag, 26.06.14
Gesamtpunktzahl: 20

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 8

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.

— Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

1. *Zur Eindeutigkeit der schwachen Ableitung.* (3)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Es sei $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ derart, dass $\int_\Omega h\varphi = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Zeige, dass $h = 0$ fast überall.

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Zeige, dass es eine Funktion $u \in C(I)$ gibt, welche schwache Ableitung $D_1 u = g$ hat. (3)

3. (a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend. Es sei $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla u = 0$ fast überall auf Ω. Zeige, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $u = c$ auf Ω. (4)
Hinweis: Betrachte $u * \rho_n$.

(b) Gib ein Beispiel einer stetigen monotonen Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, welche fast überall die klassische Ableitung 0 hat. Welcher Schluss ergibt sich aus dem vorigen Aufgabenteil? (2)
Hinweis: Verfahre wie bei der Konstruktion der Cantormenge und wähle stets einen geeigneten konstanten Wert auf dem entfernten mittleren Drittel.

(c) Sei $\Omega = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^d$. Sei $\alpha > 0$ und $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ dicht in Ω. Definiere (4)

$$u(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x - q_k|^{-\alpha}.$$

Zeige, dass u nirgends stetig ist in Ω, aber $u \in W^{1,p}(\Omega)$ für $1 \le p < d/(\alpha+1)$.

4. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Zeige, dass u einen lokal Lipschitz-stetigen Repräsentanten $\tilde{u} \in C(\Omega)$ hat. (4)
Hinweis: Sei $u_n := u * \rho_n$. Betrachte $u_n(x) - u_n(y)$ für $x, y \in B \Subset \Omega$ und n groß. Verwende, dass (zumindest entlang Teilfolge) $u_n(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in B$.