Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 17.04.15
Gesamtpunktzahl: 26

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 1

My work has always tried to unite the true with the beautiful and when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.

— Hermann Weyl (1885–1955)

1. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zudem seien $u, v\colon \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten gegeben durch $u(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^k \cos(k\theta)$ und $v(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^k \sin(k\theta)$. Dann sind u und v stetig fortsetzbar auf $\overline{\mathbb{D}}$ und diese Fortsetzungen sind harmonisch auf $\mathbb{D}$. (4)

Hinweis: $h(z) = z^k$ ist holomorph auf $\mathbb{D}$.

2. *Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten.*
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$ und $u \in C^2(\Omega)$. Sei $f\colon (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (6)

$$f(r,\theta) := u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Zeige, dass dann

$$\Delta u(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = f_{rr}(r,\theta) + \frac{f_r(r,\theta)}{r} + \frac{f_{\theta\theta}(r,\theta)}{r^2}.$$

3. *Zum elliptischen Maximumprinzip.*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zudem seien Funktionen $a_{kl}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für $k, l \in \{1, \dots, d\}$ gegeben so dass die Matrix $A = A(x) = (a_{kl}(x))$ an jedem Punkt $x \in \Omega$ symmetrisch ist und es ein $\alpha > 0$ gibt mit $\xi^T A(x)\xi \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ and $x \in \Omega$. Wir schreiben (10)

$$Lu = \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} a_{kl} \partial_k \partial_l u$$

für $u \in C^2(\Omega)$.

Zeige: Wenn $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Eigenschaft $Lu \geq 0$ hat, dann gilt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{z \in \partial\Omega} u(z).$$

Hinweis: Passe den Beweis zum elliptischen Maximumprinzip aus der Vorlesung an. Verwende dazu Resultate der linearen Algebra zur Diagonalisierung und Spur von Matrizen.

4. *Offene Mengen in* $\mathbb{R}^d$.

Gib Beispiele offener Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit folgenden Eigenschaften. Wir verlangen in dieser Aufgabe keine vollständigen Beweise und begnügen uns auch mit einem anschaulichen Argument. (6)

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist keine abzählbare Vereinigung disjunkter offener Rechtecke.
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist beschränkt, zusammenhängend und einfachzusammenhängend, aber verschieden vom Inneren von $\overline{\Omega}$.
3. $\Omega \subset (0,1)$ mit $\lambda(\Omega) < \lambda(\partial\Omega)$, wobei λ das Lebesguemaß in $\mathbb{R}$ bezeichne.
4. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist beschränkt und zusammenhängend, und zu jedem $M > 0$ gibt es Punkte $x, y \in \Omega$, welche nicht mit einer rektifizierbaren Kurve in Ω der Länge höchstens M verbunden werden können.

http://spikedmath.com/565.html