Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Sommersemester 2015

Besprechung: Freitag, 03.07.15
Gesamtpunktzahl: 25

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 11

Mathematics is the cheapest science. Unlike physics or chemistry, it does not require any expensive equipment. All one needs for mathematics is a pencil and paper.

— George Pólya (1887–1985)

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen: (3)

(i) $\Delta u = 0$ schwach

(ii) $\int_{\operatorname{supp}\varphi} |\nabla u|^2 \leq \int_{\operatorname{supp}\varphi} |\nabla(u+\varphi)|^2$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $x_0 \in \Omega$. Es sei $u \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{x_0\})$ und es gebe ein $M > 0$ mit $|u(x)| \leq M$ für alle $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$. Zeige, dass u dann eine stetige Fortsetzung in $\mathcal{H}(\Omega)$ hat. Gilt das Resultat auch für $d > 2$? Was ist mit $d = 1$? (5)
Hinweis: Betrachte zuerst den Fall $\Omega = B(0,2)$, $x_0 = 0$ und $u = 0$ auf $\partial B(0,1)$. Für $\varepsilon > 0$ definiere $w(x) = u(x) + \varepsilon \log|x|$. Verwende nun das elliptische Maximumprinzip auf einem geeigneten Gebiet und betrachte $\varepsilon \to 0+$.

3. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zudem sei Ω Dirichlet regulär, d.h. für jedes $g \in C(\partial\Omega)$ existiert eine klassische Lösung des Dirichlet Problems $D(g)$. Zeige, dass in diesem Fall die Perron-Lösung immer eine klassische Lösung ist. (2)

(b) Sei $\Omega := B(0,1) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Bestimme die Perron-Lösung u_g von g. Insbesondere: Wann ist die Perron-Lösung stetig bis auf den Rand, und in welchen Punkten $z \in \partial\Omega$ gilt dann $u_g(z) = g(z)$? (3)

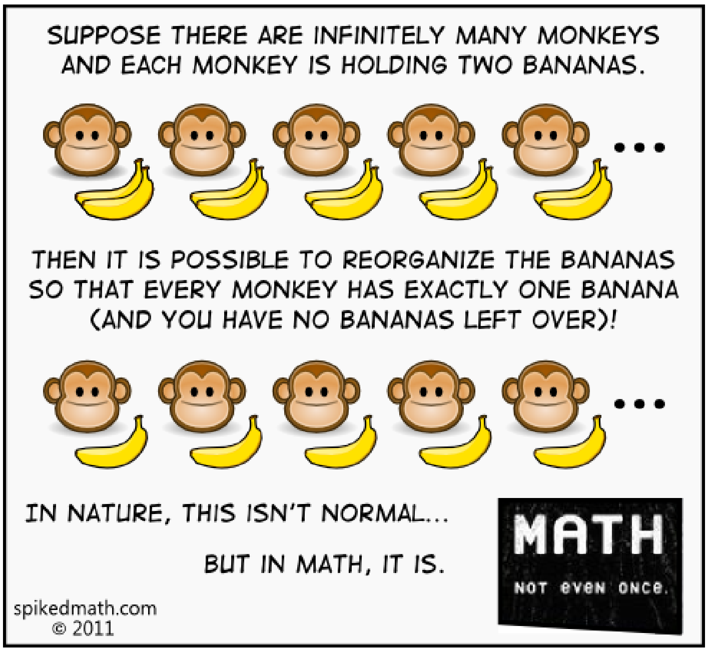
(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Sei $g \in C(\partial\Omega)$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass im Allgemeinen nicht jede klassische Lösung von $D(g)$ eine H^1 Lösung ist. Was ist mit der Umkehrung: Ist jede H^1 Lösung von $D(g)$ eine klassische Lösung? (2)

4. Sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Zeige, dass $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. (3)
Hinweis: Regularisierung und Blatt 10, Aufgabe 2 (b).

(b) Sei $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Zeige, dass $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $D_j(uv) = (D_j u)v + vD_j u$ für $j = 1, \ldots, d$. (3)

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung und $f(0) = 0$. Zeige, dass $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $D_j(f(u)) = f'(u)D_j u$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ and $j = 1, \ldots, d$. Für welche Ω ist die Bedingung $f(0) = 0$ unnötig? (4)
Hinweis: Betrachte $f(u_n)$ und $u_n := u * \rho_n$.



http://spikedmath.com/392.html