Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 17.07.15
Gesamtpunktzahl: 26

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 13

"The purpose of computing is insight, not numbers!"
— Richard W. Hamming (1915–1998)

1. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zeige, dass $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist unter Verwendung, dass $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist, falls Ω zusätzlich C^1 ist. (1)

(b) Zeige: Wenn $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist, dann ist auch $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ kompakt. (2)

2. (a) Es sei $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times (0,\infty)$. Definiere $E\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ durch (3)

$$(Eu)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x_d \geq 0, \\ -3u(x_1,\dots,x_{d-1},-x_d) + 4u(x_1,\dots,x_{d-1},-x_d/2) & \text{für } x_d < 0. \end{cases}$$

Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Omega)$. Zeige, dass $Eu \in C_{\mathrm{c}}^1(\mathbb{R}^d)$. Zeige dann, dass $\|Eu\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ mit einem $C > 0$, welches unabhängig von u ist. Folgere, dass E stetig zu einem Operator auf ganz $H^1(\Omega)$ fortgesetzt werden kann.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wenn für Ω ein Fortsetzungoperator $E\colon H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ existiert (also $(Eu)|_\Omega = u$ für alle $u \in H^1(\Omega)$), dann ist $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$. (2)

(c) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Wir nehmen an, dass Ω_1, Ω_2 und $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ alle C^1 Rand haben. Zeige: Wenn $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ und $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ mit $\operatorname{tr} u_1 = \operatorname{tr}(u_2|_{\Omega_2\setminus\Omega_1})$ in $L^2(\partial\Omega_1)$, dann definiert (3)

$$u(x) := \begin{cases} u_1(x) & \text{für } x \in \Omega_1, \\ u_2(x) & \text{für } x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

eine Funktion in $H^1(\Omega_2)$.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wie in Aufgabe 1 auf Blatt 4 seien $a_{kl}, b_k, c_k, c_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit (a_{kl}) strikt elliptisch $(k,l = 1,\dots,d)$ mit Parameter $\alpha > 0$, also $\sum_{k,l=1}^d a_{kl}\xi_k\xi_l \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Wir betrachten den formalen Differentialoperator

$$Lu := -\sum_{l=1}^d D_l\Big(\sum_{k=1}^d a_{kl}D_k u + b_l u\Big) + \sum_{k=1}^d c_k D_k u + c_0 u.$$

(a) Zeige: Wenn es ein $\delta < 2\alpha$ gibt mit $\sum_{k=1}^d (b_k + c_k)^2 \leq 2\delta c_0$ fast überall, dann gibt es für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von $Lu = f$. (3)

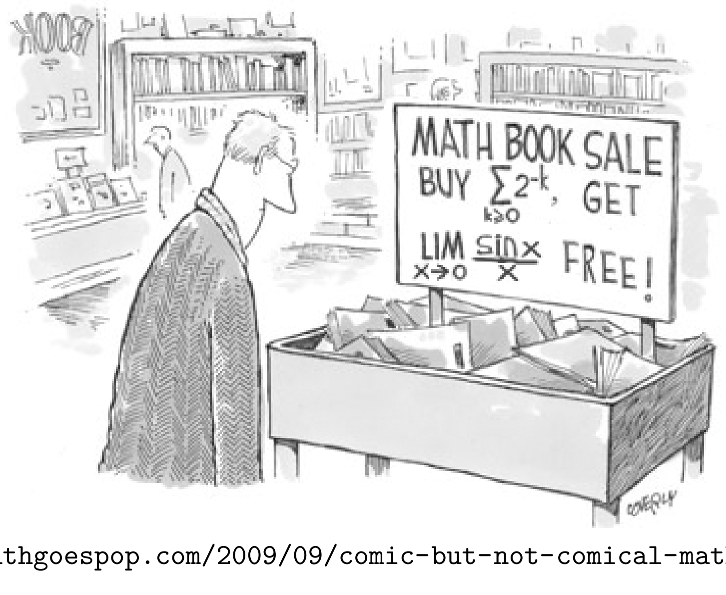
(b) Zeige: Wenn b_k und c_k stetig differenzierbar sind und $\sum_{k=1}^d (\partial_k b_k + \partial_k c_k) \leq 2c_0$ fast überall, dann gibt es für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von $Lu = f$. (3)

(c) Zeige, dass der Lösungsoperator $R: f \mapsto u$ (also $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $Lu = f$) in den beiden vorausgegangen Aufgabenteilen ein kompakter linearer Operator auf $L^2(\Omega)$ ist. (2)

(d) Wir nehmen an, dass $\lambda I - R$ nicht surjektiv ist für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeige, dass es dann eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ gibt von $Lu = \frac{1}{\lambda} u$. (2*)
Hinweis: Fredholm Alternative

4. Es folgen ein paar recht knackige Wahr/Falsch-Fragen. (7)

Nr.	**Frage**	**Wahr**	**Falsch**
1.	Wenn die Perron-Lösung $u(g)$ stetig fortsetzbar auf $\overline{\Omega}$ ist, dann ist die Fortsetzung gleich zu g auf dem Rand.	☐	☐
2.	Eine beschränkte harmonische Funktion auf einem Dirichlet-regulären $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist in $C^\infty(\overline{\Omega})$.	☐	☐
3.	Bei der Lösung des Dirichlet-Problems auf der Kreisscheibe wurde gezeigt, dass $$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f)\cos(k\theta) + b_k(f)\sin(k\theta)\big)$$ für alle $f \in C[0, 2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$ und $\theta \in [0, 2\pi)$.	☐	☐
4.	Das Dirichlet-Problem ist auch auf unbeschränkten Gebieten eindeutig lösbar falls der Rand des Gebiets C^1 ist.	☐	☐
5.	Für $d > 1$ gibt es offene nichtleere Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ und $\Omega \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$.	☐	☐
6.	Wenn (u_n) eine Folge harmonischer Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ ist, welche punktweise gegen eine beschränkte Funktion u konvergiert, dann konvergiert u_n punktweise gegen 0.	☐	☐
7.	Wenn $u \in C(\Omega)$ fast überall klassisch differenzierbar ist, und diese Ableitung in $L^2(\Omega)$ liegt, dann gilt $u \in H^1(\Omega)$.	☐	☐



http://www.mathgoespop.com/2009/09/comic-but-not-comical-mathematics.html