Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 2

This new integral of Lebesque is proving itself a wonderful tool. I might compare it with a modern Krupp gun, so easily does it penetrate barriers which were impregnable.

— E.B. van Vleck (1863–1943)

1. *Das elliptische Maximumprinzip in einer Dimension.* (12)
Es sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Interval und $b, c\colon \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Wir schreiben $Lu = u'' + bu' + cu$ für $u \in C^2(\Omega)$.

(a) Zeige: Wenn $c \le 0$ und $Lu \ge 0$ für ein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, dann ist u konstant falls es ein $x \in (a,b)$ mit $u(x) = \max_{t\in[a,b]} u(t)$ und $u(x) \ge 0$ gibt. (6)

Hinweis: Betrachte erst den Fall $Lu > 0$. Verwende $v(t) = u(t) + \alpha\big(\exp(\pm(t-x)/\varepsilon) - 1\big)$ analog zum Beweis des elliptischen Maximumprinzips.

(b) Zeige, dass die Bedingungen $c \le 0$ und $u(x) \ge 0$ notwendig sind. (3)

Hinweis: Betrachte die Gleichungen $u'' - u = 0$ und $u'' + u = 0$.

(c) Zeige, dass wenn $c = 0$ ist, man die Bedingung $u(x) \ge 0$ in (a) nicht braucht. (3)

2. *Radiale harmonische Funktionen.* (12)

(a) Sei $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$ und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$. Sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ **radial**, d.h. es gibt ein $\varphi\colon (r_1, r_2) \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \varphi(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Zeige, dass dann $u \in C^2(\Omega)$ genau dann wenn $\varphi \in C^2\big((r_1, r_2)\big)$, und dass in diesem Fall (5)

$$\Delta u(x) = \varphi''(|x|) + \frac{d-1}{|x|}\varphi'(|x|)$$

für alle $x \in \Omega$ gilt. Insbesondere ist dann also auch Δu radial.

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und betrachte $E_d\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch (2)

$$E_d(x) := \begin{cases} |x| & \text{für } d = 1, \\ \log|x| & \text{für } d = 2, \\ |x|^{2-d} & \text{für } d \ge 3. \end{cases}$$

Zeige, dass E_d harmonisch ist.

(c) Sei $0 \le r_1 < r_2 < \infty$ und $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$. Es sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch und radial. Zeige, dass es dann $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $u(x) = c_1 E_d(x) + c_2$. (3)
Hinweis: Dazu kann man (a) verwenden und die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung lösen.

(d) Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$. Zeige, dass das konkrete Dirichletproblem (2)

$$\begin{cases} \quad u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ u(x) = 0 \quad \text{für } |x| = 1, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

nicht lösbar ist.
Hinweis: Zeige zuerst, dass eine Lösung u radial sein muss. Verwende dann (c) und leite einen Widerspruch ab.

3. Es ist eine Tatsache, dass nicht jede stetige periodische Funktion auf $[0, 2\pi]$ (alternativ auf $\partial B(0,1)$) über ihre Fourierreihe dargestellt wird. (3)

Wie ist das damit zu vereinbaren, dass (1) jede solche stetige Funktion nach Stone–Weierstraß gleichmässiger Grenzwert von trigonometrischen Polynomen ist, (2) alle Funktionen in $L^2(0, 2\pi)$ über eine in L^2 konvergente Fourierreihe darstellbar sind und (3) das Dirichletproblem nach (3.7) auf $B(0,1)$ für alle stetigen Funktionen auf $\partial B(0,1)$ eine Lösung von der in (3.6) gegebener Form hat?

http://logo.cafepress.com/5/17320186.8327085.jpg