Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 22.05.15
Gesamtpunktzahl: 24

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 5

Math is like Ophelia in Hamlet – charming and a bit mad.
— Alfred North Whitehead (1861–1947)

1. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonal und $z \in \mathbb{R}^d$. Definiere $\Omega' := U\Omega + z$. Zeige: Die Abbildung $u \mapsto u(U\cdot + z)$ definiert einen isometrischen Isomorphismus von $H^1(\Omega')$ nach $H^1(\Omega)$ und von $H^1_0(\Omega')$ nach $H^1_0(\Omega)$. (3)

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Es sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit schwachen partiellen Ableitungen $D_k u$ und $D_l u$. Zeige: Falls $D_k u$ eine schwache l-te partielle Ableitung $D_l D_k u$ hat, dann hat $D_l u$ eine schwache k-te Ableitung und es gilt $D_l D_k u = D_k D_l u$. (2)

(c) Wie verträgt sich der vorige Aufgabenteil mit dem klassischen Beispiel von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch (2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

welches zweimal klassisch partiell differenzierbar ist, aber für das $(\partial_x \partial_y f)(0,0) \neq (\partial_y \partial_x f)(0,0)$. Ist $f \in H^2(B(0,1))$?

2. Sei $\Omega = (a,b)$ ein beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$.

(a) Seien $u, v \in H^1(\Omega)$. Zeige, dass $\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'$. (2)

(b) Es sei $\alpha \geq 0$ und $g \in L^\infty(\Omega)$ mit $g \geq 0$. Wir betrachten das Problem (8)

$$\begin{cases} gu - u'' = f & \text{in } \Omega, \\ u'(a) = \alpha u(a) & \text{und} \\ u(b) = 0. & \end{cases}$$

Zeige, für alle $f \in L^2(\Omega)$ hat dieses Problem eine eindeutige Lösung in $H^2(\Omega)$. Beweise ferner, dass $u \in C^\infty(\Omega)$ falls $g, f \in C^\infty(\Omega)$.
Hinweis: Definiere eine stetige koerzive Bilinearform auf einem geeigneten Teilraum von $H^1(\Omega)$ derart, dass Lax–Milgram eine Lösung liefert. Argumentiere dann, weshalb $u \in H^2(\Omega)$.

3. Es sei $1 \leq p < \infty$. Wir wissen aus der Vorlesung, dass jedes $u \in W^{1,p}(I)$ einen stetigen Repräsentanten $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ hat falls $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist.

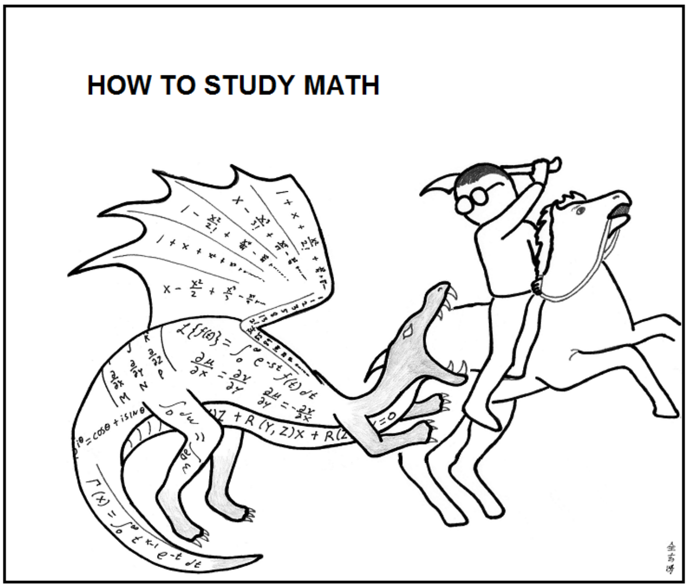
(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Zeige, dass jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ einen Repräsentanten in $C(\Omega)$ hat. Kann man immer einen Repräsentanten in $C_0(\Omega)$ oder in $C(\overline{\Omega})$ finden? (2)

(b) Es sei $I = (a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zudem sei (u_n) eine Folge in $W^{1,p}(I)$ derart, dass (Du_n) eine Cauchyfolge in $L^p(I)$ ist und es ein $t_0 \in \overline{I}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(t_0) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann (u_n) in $W^{1,p}(I)$ konvergiert und beschreibe den Grenzwert. (2)

(c) Gib ein Beispiel einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ derart, dass nicht alle Elemente von $W^{1,p}(\Omega)$ Einschränkungen von Elementen von $W^{1,p}(\mathbb{R})$ sind und $C(\overline{\Omega})$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. (1)

(d) Sei $a < b$ und $I = (a, b)$. Zeige, dass es ein $C > 0$ gibt mit $\|\tilde{u}\|_{C(\overline{I})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ für alle $u \in W^{1,p}(I)$ mit stetigem Repraesentanten $\tilde{u} \in C(\overline{I})$. (2)

(e) Sei $a < b$ und $I = (a, b)$. Beschreibe den Abschluss von $\mathcal{D}(I)$ in $W^{1,p}(I)$. (3*)



Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos

`http://abstrusegoose.com/353`