Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 05.06.15
Gesamtpunktzahl: 26

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 7

Nicht etwa, daß bei größerer Verbreitung des Einblicks in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt würde, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.

— Karl Menger (1902–1985)

1. Sei $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|^\alpha$ für $x \neq 0$. Bestimme in Abhängigkeit von d alle Paare $(\alpha, p) \in \mathbb{R} \times [1, \infty]$ für die $f \in W^{1,p}(\Omega)$. (5)

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and $(x_0, y_0) \in \Omega$. Es sei $r > 0$ mit $B := B((x_0, y_0), r) \subset \Omega$.

(a) Zeige: Falls $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{B})$, dann gilt (3)

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))\, \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Poisson'sche Integralformel.

(b) Zeige: Für alle $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ gilt (2)

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(x, y)\, \mathrm{d}(x, y).$$

3. Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $B_r := B(0, r) \subset \mathbb{R}^d$ für $r > 0$. Fixiere ein $r > 0$. In dieser Aufgabe bezeichnen wir mit σ_r das Oberflächenmaß auf ∂B_r aus dem Satz von Gauß auf B_r.

(a) Zeige, dass $d \cdot |B_r| = r\sigma_r(\partial B_r)$. (3)
Hinweis: Betrachte Δf für $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

(b) Wir setzen $\omega_d := \sigma_1(\partial B_1)$. Zeige, dass $\sigma_r(\partial B_r) = dr^{d-1}|B_1|$ und folgere, dass $\sigma_r(\partial B_r) = r^{d-1}\omega_d$ und $|B_r| = \frac{\omega_d r^d}{d}$. (2)

4. Es sei $d \geq 2$ und $u \in C(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit $|\partial_k u| \leq C$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für alle $k = 1, \dots, d$. (4)
Setze $f(x) := \Delta u(x)$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Zeige, dass $\Delta u = f$ schwach auf $\mathbb{R}^d$ falls $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
Hinweis: Green'sche Formeln.

5. Für $d \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ setze $B_d(r) := B(0,r) \subset \mathbb{R}^d$ und $S_{d-1}(r) := \partial B_d(r)$. Wie in der Vorlesung sei nun $\sigma_r(A) := dr^{d-1}|\{y \in \mathbb{R}^d : |y| \le 1,\ ry \in |y| \cdot A\}|$ für $A \in \mathcal{B}(S_{d-1}(r))$.

(a) Zeige, dass (2)

$$\frac{d}{dR}\int_{B_d(R)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{S_{d-1}(R)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma_R(y)$$

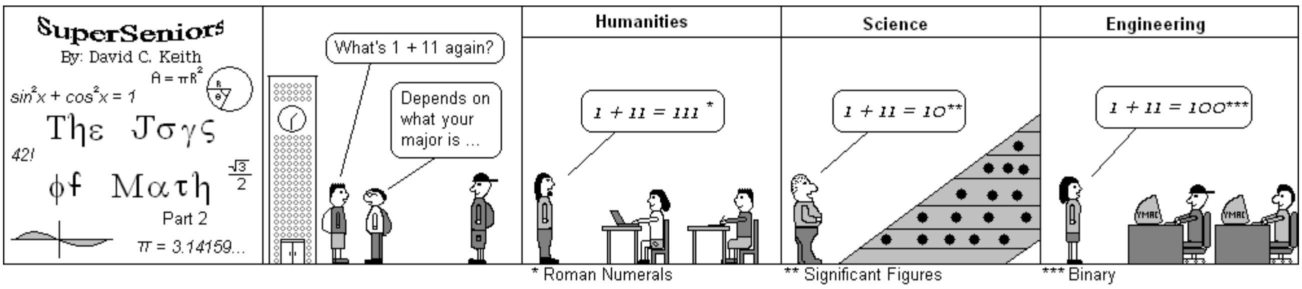
für $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig. Berechne die Ableitung (2)

$$\frac{d}{dR}\Big(\int_{B_{d-1}(R)}\int_{-\sqrt{R^2-|x'|^2}}^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} f(x_1,x')\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x'\Big).$$

(c) Beweise: Für $u \in C^1(\overline{B_d(R)})$ gilt (3)

$$\int_{B_d(R)} \partial_1 u = \int_{S_{d-1}(R)} u(y)\frac{y_1}{R}\,\mathrm{d}\sigma_R(y).$$



http://superseniors.wordpress.com/2007/12/27/comic-the-joys-of-math-ii2io/