Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 12.06.15
Gesamtpunktzahl: 12

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 8

Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf, um uns in diesem Jammertal zu trösten und zu unterhalten.

— Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717–1783)

1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C(\Omega)$. Zeige, dass u genau dann die Mittelwerteigenschaft für Bälle hat, wenn u die Mittelwerteigenschaft für Sphären hat; d.h. zeige die Äquivalenz folgender beider Aussagen: (4)

(i) Für alle $x \in \Omega$ und $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ gilt

$$\fint_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = u(x).$$

(ii) Für alle $x \in \Omega$ und $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ gilt

$$\fint_{\partial B(x,r)} u(z)\,\mathrm{d}\sigma(z) = u(x).$$

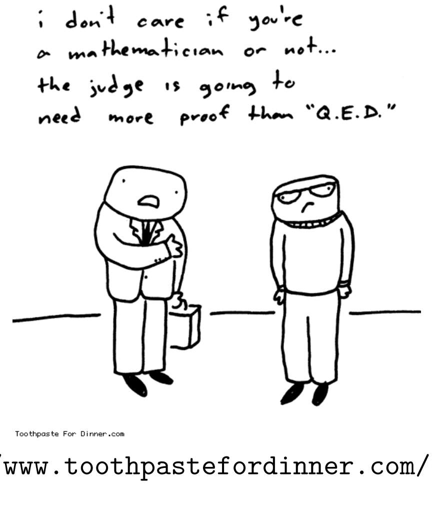
2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und K liege kompakt in Ω. Zeige, dass es ein $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ gibt mit $0 \le f \le 1$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in K$. (4)

Hinweis: Betrachte die Faltung einer geeigneten Indikatorfuntion mit ρ_n.

3. Sei $1 \le p \le \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und (4)

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Hinweis: Betrachte $|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)||f(x-y)|^{1-1/p}$.



http://www.toothpastefordinner.com/060312/