Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 20.05.16
Gesamtpunktzahl: 30

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 5

Mathematics is not a deductive science—that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork.

— Paul R. Halmos (1916–2006)

Präsenzaufgaben

1. Sei $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein Jordanblock. Was ist das Minimalpolynom von J? (Man diskutiere auch andere Kenngrößen für J.)

2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ mit $\dim V < \infty$ und $f \in \mathcal{L}(V)$. Beweise, dass $P_f(f) = 0$.

Beachte: Der Satz von Cayley–Hamilton wurde in der Vorlesung nur für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gezeigt!

Übungsaufgaben

1. Sei $n = \dim V < \infty$, $f \in \mathcal{L}(V)$ und $p \in \mathbb{K}[t]$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. (2+2+2)

(a) Zeige
$$[p(f)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = p([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}).$$

(b) Zeige, wenn λ ein Eigenwert von f ist, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

(c) Zeige, wenn λ ein Eigenwert von f ist, dann gilt $V_{\text{geo}}(f,\lambda) = \dim \operatorname{Ker}([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda E_n)$.

2. Bestimme (natürlich mit Beweis) das Minimalpolynom der reellen Matrix (6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Eigenwerte kann man hier nicht einfach ausrechnen. Betrachte statt dessen zum Beispiel die erste Spalte der Matrixpotenzen A^k für $k \in \{0,\dots,5\}$.

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und 0 sei kein Eigenwert von A. Zeige, dass dann A invertierbar ist und A^{-1} als Polynom in A geschrieben werden kann. (4)

Hinweis: Verwende Cayley–Hamilton.

4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Seien U und W Unterräume mit $V = U \oplus W$. Sei $f \in \mathcal{L}(V)$ mit $f(U) \subset U$. (2+4+2)

(a) Zeige, dass $h \in \mathcal{L}(W, U)$ und $g \in \mathcal{L}(W)$ existieren mit

$$f(w) = h(w) + g(w)$$

für alle $w \in W$.

(b) Sei g wie im ersten Aufgabenteil. Zeige, wenn P_f über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt, so gilt dies auch für P_g.

(c) Sei g wie im ersten Aufgabenteil. Sei $f_1 \colon U \to U$ die Einschränkung von f auf U. Zeige, dass im Allgemeinen nicht $M_f = M_{f_1} \cdot M_g$ gilt, wobei M_h das Minimalpolynom einer Abbildung h bezeichne.

5. Seien $p, m \in \mathbb{C}[t]$ durch (6)

$$p = (t-2)^5 (t+5)^2 (t-i)^3$$

und

$$m = (t-2)^2 (t+5)^2 (t-i)^2$$

gegeben. Bestimme zwei komplexe Matrizen welche p als charakteristisches und m als Minimalpolynom haben, aber nicht ähnlich sind.

Hinweis: Betrachte geeignete block-diagonale Matrizen. Was ist das Minimalpolynom von einem Jordanblock?

A formative day for Georg Cantor.

`http://www.smbc-comics.com?id=3270`