Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 27.05.16
Gesamtpunktzahl: 30+4*

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 6

The greater our knowledge increases, the greater our ignorance unfolds.

— John F. Kennedy (1917–1963)

Präsenzaufgaben

1. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\dim V < \infty$ und $f \in \mathcal{L}(V)$.

(a) Zeige, wenn $f \circ f = -f$, dann ist f diagonalisierbar.

(b) Zeige, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $f^5 - f = -2\,\mathrm{id}$, dann ist f diagonalisierbar.

Konstruiere selbst andere solche Beispiele.

Hinweis: Charakterisierung der Diagonalisierbarkeit über das Minimalpolynom. Verwende ohne Beweis: Eine lineare Abbildung ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr Minimalpolynom in lauter unterschiedliche Linearfaktoren zerfällt. Die Aufgabe 2 (b) liefert induktiv einen Beweis für dieses Kriterium.

2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Matrix mit allen Einträgen gleich 1. Bestimme die Jordansche Normalform von A.

Hinweis: Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat A?

Übungsaufgaben

1. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\dim V < \infty$. Sei $N \in \mathcal{L}(V)$ nilpotent mit $N^{d-1} \neq 0$ und $N^d = 0$. Wir nehmen an, dass Satz (14.4) bereits bewiesen ist, also dass N eine Jordansche Normalform hat. (2+4)

(a) Zeige, dass die maximale Dimension von $\mathrm{span}\{v, Nv, \ldots, N^{d-1}v\}$ für $v \in V$ gleich d ist.

(b) Zeige, dass es genau $\mathrm{Rang}\, N^{d-1}$ Jordankästchen der Größe d in der Jordanschen Normalform von N gibt.

Was ist die Anzahl der Jordankästchen der Größe $d-1$? Wie könnte demnach eine allgemeine Formel für die Anzahl Jordankästchen der Größe $s \in \{1, \ldots, d\}$ aussehen?

2. Seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$ derart, dass es kein nichtkonstantes Polynom gibt, welches sowohl p_1 als auch p_2 teilt. Sei $f \in \mathcal{L}(V)$. (6+4)

(a) Zeige, dass $\mathrm{Ker}\, p_1(f) \oplus \mathrm{Ker}\, p_2(f) = \mathrm{Ker}\big((p_1 \cdot p_2)(f)\big)$.

Hinweis: Verwende Blatt 2, Aufgabe 2 (c) um die Identitätsabbildung geeignet als Summe darzustellen; die Summanden sind dann die Projektionen entsprechend der Zerlegung auf der linken Seite der Gleichung.

(b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $M_A \mid (p_1 \cdot p_2)$. Zeige, dass A dann ähnlich zu einer Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ ist, mit $p_1(B_1) = 0$ und $p_2(B_2) = 0$. Wie groß sind die Blockmatrizen B_1 und B_2?

3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Definiere die Matrix (8)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Zeige, dass $M_A = a_0 + a_1 t + \ldots a_{n-1} t^{n-1} + t^n$ gilt.

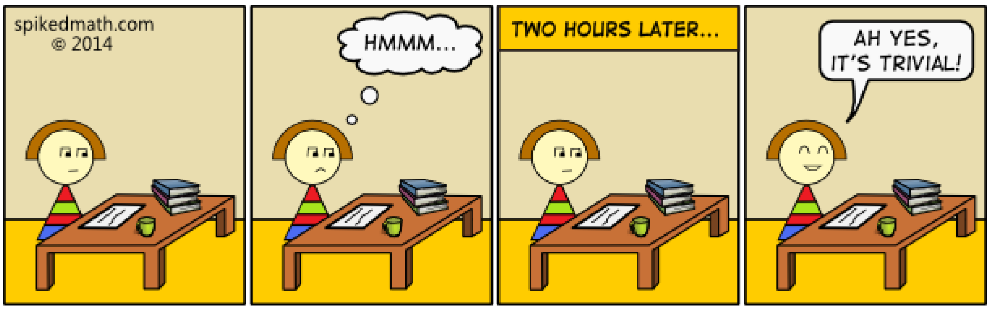
Hinweis: Bestimme zuerst P_A. Um eine Bedingung an $\deg M_A$ zu bekommen, betrachte $A^k v$ für einen geeigneten Vektor $v \in \mathbb{K}^n$.

4. Sei V ein Vektorraum mit $n := \dim V < \infty$ und $f \in \mathcal{L}(V)$. Seien $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. (6+4*)

(a) Sei W ein Unterraum mit $f(W) \subset W$. Zeige, wenn $\sum_{j=1}^{k} v_j \in W$, dann folgt $v_j \in W$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Hinweis: Verfahre so ähnlich wie im Beweis von Lemma (12.11).

(b) Sei $k = n$. Bestimme alle Unterräume W mit $f(W) \subset W$ falls $n = 3$. Gib für allgemeines n eine Formel für die Anzahl dieser Unterräume an.



http://spikedmath.com/557.html