Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Abgabe: Freitag, 10.06.16
Gesamtpunktzahl: 52+8*

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 7 und 8

Nowadays, there are only three really great English mathematicians: Hardy, Littlewood, and Hardy–Littlewood.

— Harald Bohr (1887–1951)

Präsenzaufgaben Woche 7

1. Sei $N \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotent. Seien $v, w \in \mathbb{K}^n$ und $d, s \in \mathbb{N}$ mit $N^d v = 0$, $N^{d-1}v \neq 0$, $N^s w = 0$ und $N^{s-1}w \neq 0$. Zeige, dass die Vektoren $v, \dots, N^{d-1}v, w, \dots, N^{s-1}w$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $N^{d-1}v$ und $N^{s-1}w$ linear unabhängig sind.

2. Bestimme eine Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgaben Woche 8

3. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige, dass A und B genau dann ähnlich sind, wenn sie eine gleiche Jordansche Normalform haben. Zeige zudem, dass sich jede Jordansche Normalform einer gegebenen Matrix nur in der Reihenfolge der Jordanblöcke unterscheidet.

4. Zeige, dass eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ im allgemeinen keine Quadratwurzel (also eine Matrix B mit $B^2 = A$) zu haben braucht. Zeige, dass A andererseits auch unendlich viele Quadratwurzeln haben kann.

Übungsaufgaben

1. Bestimme die Jordansche Normalform inklusive der Ähnlichkeitstransformationsmatrix für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ gegeben durch (10)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: $\sigma(A) = \{0, 2\}$.

2. Beweise, dass die beiden Matrizen A und B in $\mathbb{C}^{4\times 4}$ ähnlich sind, wobei (10)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & -3 & -5 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $n = \dim V < \infty$ und $f \in \mathcal{L}(V)$. Sei $p \in \mathbb{K}[t]$ ein irreduzibles normiertes Polynom derart, dass ein $d \in \mathbb{N}$ existiert mit $p^d(f) = 0$ in $\mathcal{L}(V)$. Hierbei sei d minimal gewählt, also $p^{d-1}(f) \neq 0$. (4+4+8)

(a) Für $v \in V$ definiere $Z_v := \{q(f)v : q \in \mathbb{K}[t]\}$. Zeige, dass Z_v ein Unterraum von V ist mit $f(Z_v) \subset Z_v$.

(b) Zeige, wenn ein normiertes $q \in \mathbb{K}[t]$ mit $\deg q \geq 1$ das Polynom p^d teilt, so existiert ein $e \in \{1, \ldots, d\}$ mit $q = p^e$.

Hinweis: Schreibe p^d als Produkt und kürze so lange durch p bis beide Faktoren nicht mehr weiter durch p teilbar sind. Dann verwende Blatt 2, Aufgabe 2 (c).

(c) Sei $v \in V$ mit $p^{d-1}(f)v \neq 0$ und sei $\tilde{f} := f|_{Z_v} \in \mathcal{L}(Z_v)$. Zeige, dass $\mathcal{B} = (v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v))$ für $m = d \deg p$ eine Basis von Z_v ist. Bestimme die Basisdarstellung $[\tilde{f}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ und zeige $M_{\tilde{f}} = p^d$.

Hinweis: Verwende Division mit Rest, das Minimalpolynom und den vorausgegangenen Aufgabenteil. Siehe auch Blatt 6, Aufgabe 3.

4. In dieser Aufgabe sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. (4+6+6)

(a) Zeige, dass eine diagonalisierbare Matrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und eine nilpotente Matrix $N \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existieren, mit $A = D + N$ und $DN = ND$.

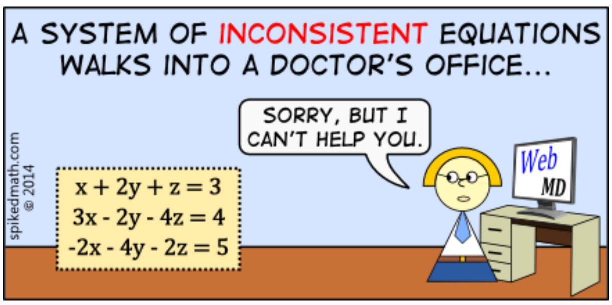
(b) Zeige, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn M_A in lauter unterschiedliche Linearfaktoren zerfällt.

(c) Seien $B, C \in \mathbb{K}^{m\times m}$. Zeige, wenn die Blockdiagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

ähnlich sind, so sind B und C ähnlich.

(d) Zeige, dass A^{T} und A ähnlich sind. (8*)



`http://spikedmath.com/563.html`