ulm university universität uulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Klausur zur Linearen Algebra 2

4. Oktober 2016; Bearbeitungszeit 120 Minuten; 90 Punkte insgesamt

1. Beantworten Sie für die nachfolgenden quadratischen komplexen Matrizen A, B, C jeweils folgende drei Fragen: 1) Ist das Spektrum rein reell? 2) Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren? 3) Ist die Matrix unitär diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antworten! (21)

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die Komponenten $a_{kl} = i\dfrac{(-1)^{k+l}}{k+l-1}$ für alle $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Sei A eine komplexe Matrix, welche unitär ähnlich (d.h. es gibt ein unitäres U mit $\tilde{A} = U^{-1}AU$) zur Blockdiagonalmatrix (14)

$$\tilde{A} = \operatorname{diag}(J_4(0), J_2(0), J_2(0), J_1(1+i), J_1(1-i))$$

ist. Geben Sie folgende Größen und Objekte an (Begründung nicht erforderlich):

(a) das charakteristische Polynom P_A
(b) $\dim((\operatorname{Ker} A^3)/(\operatorname{Ker} A))$
(c) eine zu A ähnliche reelle Matrix
(d) die Frobeniusnorm $\|A\|_F$
(e) $\operatorname{Exp}(\tilde{A})$
(f) $\det((A - E_{10})^2)$
(g) $\operatorname{Rang}\big(A^2(A-2E_{10})^5(A-(1+i)E_{10})^2\big)$

3. Zeigen Sie, dass die folgende Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ nur einen Eigenwert hat, und bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\tilde{A}$ von A und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ mit $\tilde{A} = S^{-1}AS$. (13)

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Es sei $\mathbb{R}_2[t]$ der 3-dimensionale Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 über $\mathbb{R}$ und V sei ein 4-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Es seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ zwei Basen von $\mathbb{R}_2[t]$. Zudem sei $\mathcal{G}$ eine Basis von V. Schließlich seien $f\colon \mathbb{R}_2[t] \to V$ und $g\colon V \to \mathbb{R}_2[t]$ zwei lineare Abbildungen mit (12)

$$[g\circ f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [g]^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Basis $\mathcal{B}$ dadurch eindeutig bestimmt ist und berechnen Sie $\mathcal{B}$.

5. Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar ist, dann ist A^k genau dann diagonalisierbar, wenn A diagonalisierbar ist. (*Hinweis:* Jordansche Normalform) (12)

6. Widerlegen Sie jede der folgenden falschen Aussagen mit einem Gegenbeispiel (mit Begründung).

(a) Wenn A und B aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar sind, dann ist auch $A + B$ diagonalisierbar. (3)

(b) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit strikt positiven Komponenten ist, dann definiert $\langle x, y\rangle_A := y^TAx$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. (5)

7. Berechnen Sie für $A := \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ eine geschlossene Form der Matrixexponentialfunktion $\operatorname{Exp}(tA)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie damit ein Fundamentalsystem für die Gleichung $u'(t) = Au(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ und beweisen Sie, dass alle Lösungen dieser Gleichung für $t \to \infty$ komponentenweise gegen 0 konvergieren. (10)