Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Probeklausur zur Linearen Algebra 2

1. Welche der folgenden komplexen Matrizen sind diagonalisierbar, welche sogar unitär diagonalisierbar? (10)

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & e^{-2\pi i/3} \\ 1 & e^{2\pi i/3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass eine Matrix A genau dann unitär diagonalisierbar ist (d.h. es existiert ein U unitär mit $U^{-1}AU$ diagonal), wenn A normal ist.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{L}(V)$. Es seien $p, q \in \mathbb{C}[t]$ gegeben durch $p = t^3 + t^2 - t - 1$ und $q = t^3 - t^2 - t + 1$. Zeigen Sie, wenn $p(f) = 0$ und $q(f) = 0$, dann ist f diagonalisierbar. (4)

3. Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[t]$ durch (8)

$$p_1 = t^3 - t^2 - t + 1 \quad \text{und} \quad p_2 = t^2 - t + 1$$

gegeben. Berechne Polynome $q_1, q_2 \in \mathbb{R}[t]$ mit

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1$$

in $\mathbb{R}[t]$.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch (10)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass A^k für $k \to \infty$ komponentenweise gegen eine Matrix B konvergiert und bestimme B.

5. Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ gegeben durch (10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass A nur einen Eigenwert hat und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ so, dass $S^{-1}AS$ Jordansche Normalform hat.

6. Beweisen Sie, dass die komplexen Matrizen (12)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind.

7. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\operatorname{Exp}(A)$ diagonalisierbar ist. (8)

Hinweis: Jordansche Normalform.

8. Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ und $\mathcal{B}, \mathcal{G}$ seien zwei Basen von $\mathbb{R}^3$. Es gelte (8)

$$[f]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}$.

9. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn ein $p \in \mathbb{C}[t]$ existiert mit $p(A) = A^*$. (8)

10. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und $\mathscr{U} := \{U \in \mathbb{C}^{n\times n} : U \text{ ist unitär}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{U}$ bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist und diese (6)

$$Z := \{V \in \mathscr{U} : UV = VU \text{ für alle } U \in \mathscr{U}\}$$

als einen Normalteiler hat.

11. Sei V ein Vektorraum der Dimension 7 und U_1, U_2 seien zwei Unterräume von V mit $\dim U_1 = 5$ und $\dim U_2 = 3$. Welche Dimensionen können die Räume $U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$, V/U_1, $V/(U_1 \cap U_2)$ oder $V/(U_1 + U_2)$ haben? (4)

12. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Jede komplexe quadratische Matrix ist unitär ähnlich zu einer Jordanschen Normalform. (3)

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Genau dann ist A unitär, wenn A normal ist und $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ gilt. (3)

(c) Wenn $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ das Minimalpolynom $M_A = (t-i)^2(t+i)^2$ hat, dann gibt es für jede Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ von $u'(t) = Au(t)$ eine Konstante $C > 0$ mit $|u_k(t)| \leq C$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und alle $t \geq 0$. (3)

(d) Sei $u_1, \dots, u_k$ ein Orthonormalsystem in $\mathbb{C}^n$. Wenn $A = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{C}^{n\times k}$, dann ist AA^* die orthogonale Projektion auf $U := \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}$. (3)