Thm: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A\subset\mathbb{R}$ messbar, f' ex. auf A mit $|f'|\le L$

$\Rightarrow$ $f(A)$ messbar und $\lambda(f(A))\le L\cdot\lambda(A)$.

Beweis: 1) Sei $\varepsilon>0$, $A\subset U$ offen, $\lambda(U\setminus A)<\varepsilon$

$\forall x\in A$ ex. bel. kleine Intervalle I mit

$$I=[x-h,x+h]\subset U, \quad \left|\frac{f(x+h')-f(x)}{h'}-f'(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\ \forall |h'|\le h$$

Beachte: $\forall y,z\in I$ gilt

$$|f(y)-f(z)|\le 2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}+|f'(x)|\right)\cdot h$$

Zu jedem I definiere $J=[\inf_I f, \sup_I f]$.

Die Intervalle J enthalten $f(x)$ und werden bel. klein.

Es gilt $\lambda^*(f(I))\le\lambda(J)\le(L+\varepsilon)\cdot\lambda(I)$.

Sei nun (J_k) eine Vitali-Überdeckung von $f(A)$ mit zugehörigen Intervallen I_k. Also

J_k sind paarweise disjunkt ($\Rightarrow$ I_k paarweise disjunkt)

und $\lambda^*(f(A)\setminus\bigcup_k J_k)=0$.

Es gilt $\lambda^*(f(A))\le\lambda(\bigcup_k J_k)\underset{I_k \text{ disjunkt}}{\le}\sum(L+\varepsilon)\lambda(I_k)=(L+\varepsilon)\lambda(U)\le(L+\varepsilon)(\lambda(A)+\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $\lambda^*(f(A))\le L\cdot\lambda(A)$.

2) $f|_A$ ist stetig und $A=N\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$ wobei N Nullmenge und $K_n\subset A$ kompakt (innere Regularität)

$\Rightarrow$ $f(K_n)$ ist messbar $\forall n\in\mathbb{N}$

und $f(N)$ ist Nullmenge und damit messbar nach 1).

$\Rightarrow$ $f(A)=f(N)\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f(K_n)$ ist messbar. □