|4*| (c) $\nu(A) := \inf\{\mu(B) : A \subset B, B \text{ Borel}\}$, μ ein Borel ÄM. (5)

1. Bew: ν ist ÄM

Nur die σ-Subadditivität ist nicht offensichtlich

Seien (A_k) gegeben, $\varepsilon > 0$. $\forall k$ sei B_k Borel mit $A_k \subset B_k$ und $\mu(B_k) - 2^{-k}\cdot\varepsilon \le \nu(A_k)$

$$\Rightarrow \sum_k \nu(A_k) \ge \sum_k \mu(B_k) - \varepsilon \underset{\mu \text{ ÄM}}{\ge} \mu\Big(\bigcup_k B_k\Big) - \varepsilon$$

$$\underset{\bigcup_k B_k \text{ ist Borel}}{=} \nu\Big(\bigcup_k B_k\Big) - \varepsilon \ge \nu\Big(\bigcup_k A_k\Big) - \varepsilon$$

$\overset{\varepsilon \to 0+}{\Rightarrow}$ ν σ-subadditiv und damit ÄM.

2. Es ist klar nach Def. dass $\nu(A) \ge \mu(A)$ $\forall A$

Ebenso gilt $\nu(B) = \mu(B)$ $\forall B$ Borel

3. Verbleibt zu zeigen: ν ist Borel und Borel regulär

Sei B Borel. Wir zeigen, ~~daß~~ dass B ν-messbar ist.

Sei A bel. und $\tilde{A}$ Borel mit $A \subset \tilde{A}$ und $\mu(\tilde{A}) \le \nu(A) + \varepsilon$ für ein bel. $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \varepsilon + \nu(A) \ge \mu(\tilde{A}) \underset{\mu \text{ Borel}}{=} \mu(\tilde{A} \cap B) + \mu(\tilde{A} \setminus B)$$

$$\ge \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B)$$

$$\overset{\varepsilon \to 0+}{\Rightarrow} \nu(A) \underset{\le\ \leftarrow\ \sigma\text{-Subadditivität}}{\ge} \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B)$$

Da $\nu(B) = \mu(B)$ $\forall B$ Borel, gilt

$$\nu(A) = \inf\{\nu(B) : A \subset B, B \text{ Borel}\}$$

Wie in |2| (a) folgt ν ist Borel regulär

(Gegeben A, wähle B_k Borel mit $A \subset B_k$ und $\nu(B_k) \le \nu(A) + \frac{1}{k}$.
Nun setze $B := \bigcap B_k$, Borel, $A \subset B$, $\nu(A) = \nu(B)$.) $\square$