Universität Ulm

Besprechung: Montag, 09.11.15

Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2015/16

Übungen Geometrische Analysis: Blatt 4

1. Sei μ ein Borel reguläres äußeres Maß. Zeige, dass für jede aufsteigende Folge von Teilmengen (A_k) gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big).$$

(Wir erlauben hier uneigentliche Konvergenz gegen ∞.)

2. (a) Sei μ Borel und lokal endlich. Zeige, wenn $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\, U \text{ offen}\}$ für alle $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt, dann ist μ Radon.

(b) Zeige, dass das äußere Lebesgue-Maß λ^* in $\mathbb{R}^d$ die beiden Eigenschaften aus Theorem 4.4 hat. Folgere, dass λ^* Radon ist.

3. Sei μ ein äußeres Maß in $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass μ genau dann Borel ist, wenn

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

für alle $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ gilt.

4.* (a) Gib ein Beispiel eines äußeren Maßes auf $\mathbb{R}$, welches Borel, aber nicht Borel regulär ist.

(b) Für alle $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1 & \text{falls } A \text{ überabzählbar und } A \setminus [-n, n] \text{ abzählbar für ein } n \in \mathbb{N}, \\ \infty & \text{falls } A \setminus [-n, n] \text{ überabzählbar für alle } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeige, dass μ ein äußeres Maß ist. Bestimme die μ-messbaren Mengen und zeige, dass μ nicht die Stetigkeitseigenschaft aus Aufgabe 1 hat.

(c) Sei μ ein äußeres Borel Maß. Dann definiert

$$\nu(A) := \inf\{\mu(B) : A \subset B,\, B \text{ Borel}\}$$

ein Borel reguläres äußeres Maß, das auf Borel Mengen mit μ übereinstimmt.