2) Sein $A, B \subset \mathbb{R}^d$ beliebig. o.B.d.A $\lambda^*(A) < \infty$, $\lambda^*(B) < \infty$. b

Sei $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^d$ messbar mit $A \subset \tilde{A}$ und $\lambda^*(A) = |\tilde{A}|$ (möglich da λ^* Borel regulär).

Definiere $A^* := \{x \in \mathbb{R}^d : \Theta^d(A,x) = 1\}$

Es gilt
$$\lambda^*(A \cap B(x,r)) \le \lambda^*(\tilde{A} \cap B(x,r)) = \lambda^*(\tilde{A}) - \lambda^*(\tilde{A} \setminus B(x,r))$$
$$\le \lambda^*(A) - \lambda^*(A \setminus B(x,r)) = \lambda^*(A \cap B(x,r)).$$

Damit gilt Gleichheit und
$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^d : \Theta^d(\tilde{A}, x) = 1\} \text{ ist messbar;}$$
siehe Blatt 6, Aufgabe 3. (b).

Zudem gilt nach dem Lebesgue'schen Dichtesatz, dass
$$|\tilde{A} \,\Delta\, A^*| = 0.$$

Insbesondere $\lambda^*(A) = |\tilde{A}| = |A^*|$

Wir def. analog $\tilde{B}, B^*, (A+B)^*, (A+B)^\sim$.

Beh.: $A^* + B^* \subset (A+B)^*$

Sei $x \in A^*$, $y \in B^*$.
$$1 \ge \frac{\lambda^*((A+B) \cap B(x+y,r))}{\alpha(d)\, r^d} \ge \frac{\lambda^*(x+B \cap B(x+y,r))}{\alpha(d)\, r^d} = \frac{\lambda^*(B \cap B(y,r))}{\alpha(d)\, r^d} \xrightarrow[r \to 0+]{} 1.$$
$$\Rightarrow x + y \in (A+B)^*.$$

Es folgt:
$$\lambda^*(A)^{1/d} + \lambda^*(B)^{1/d} = |A^*|^{1/d} + |B^*|^{1/d}$$
$$\underset{A^*, B^* \text{ messbar}}{\overset{1)}{\le}} |A^* + B^*|^{1/d} \underset{\text{Bel.}}{\le} |(A+B)^*|^{1/d} = |(A+B)^\sim|^{1/d}$$
$$= \lambda^*(A+B)^{1/d}.$$