141* 1) Es ist klar, dass ~~$\|\ \|_{BV(\Omega)}$ eine Norm~~

~~Ist~~ $BV(\Omega)$ ein Vektorraum ~~ist~~ und $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ eine Norm darauf ist.

Es verbleibt die Vollständigkeit von $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ zu zeigen.

Sei (f_n) Cauchy bzgl. $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$.

$\Rightarrow \exists\, f \in L^1(\Omega): f_n \to f$ in $L^1(\Omega)$

Insbesondere $V(f,\Omega) \underset{131\,(b)}{\leq} \liminf\limits_{n\to\infty} V(f_n,\Omega) \underset{131\,(a)}{=} \liminf \|Df_n\|(\Omega) < \infty$

$\Rightarrow f \in BV(\Omega)$

$\cancel{\|Df - Df_n\|(\Omega)} = V(f-f_n,\Omega) \leq \liminf\limits_{m\to\infty} V(f_m - f_n,\Omega) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

da (f_n) Cauchy

$\| = \|D(f-f_n)\|(\Omega)$ $\Rightarrow f_n \to f$ in $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$

Dies zeigt die Vollständigkeit.

2) $C^1(\Omega) \cap BV(\Omega)$ ist (für $\Omega \neq \emptyset$) <u>nie</u> dicht in $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$

$\rightsquigarrow$ dies ist ein Indikator, dass $\|\cdot\|_{BV(\Omega)}$ eine zu feine/~~starke~~ Topologie erzeugt

Sei $B = B(x_0,r_0) \subset\subset \Omega$. o.B.d.A $x_0 = 0$

$\|D\mathbb{1}_B\|(A) = \mathcal{H}^{d-1}(A \cap \partial B)$

$\Rightarrow \mathbb{1}_B \in BV(\Omega)$ mit

Ann: Sei (f_n) in $C^1(\Omega) \cap BV(\Omega)$: $f_n \to \mathbb{1}_B$ in $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$

$$\int_\Omega (f_n - \mathbb{1}_B)\,\mathrm{div}\,\varphi = -\int_\Omega \nabla f_n \cdot \varphi \, d\lambda_d - \int_{\partial B} \varphi\, \nu_B \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

Sei (φ_n) in $C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ derart, dass $\varphi_n = \frac{-x}{|x|}$ auf Umgebung von ∂B, $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$ und $\varphi_n \to 0$ λ_d-f.ü. auf Ω

$$\Rightarrow \|f_n - \mathbb{1}_B\|_{BV(\Omega)} \geq V(f_n - \mathbb{1}_B,\Omega) \geq \limsup_{m\to\infty}\Big(-\int_\Omega \nabla f_n \cdot \varphi_m \, d\lambda_d - \int_{\partial B} \varphi_m \nu_B \, d\mathcal{H}^{d-1}\Big)$$

$$\geq 0 + \int_{\partial B} d\mathcal{H}^{d-1} = \alpha(d)\, d\, r_0^{d-1} > 0 \quad ↯$$

unabh. von n

$\varphi_m = -\nu_B$ auf ∂B