Wichtige Sätze

Wichtige Sätze gibt es in der Vorlesung so einige. Manche fallen dabei in die Kategrie „das Resultat sollte man kennen". Beispiele dafür sind die tiefen Resultate aus Kapitel 9 zur Struktur rektifizierbarer Mengen, viele der Sachen in Kapitel 12 zum Divergenzsatz, der Caratheodory'sche Erweiterungssatz, das aufwendige Resultat zur Identität zwischen Hausdorffmaß und Minkowski-Inhalt in Theorem 10.11, der Riesz–Radon'sche Darstellungssatz.

Ich habe jetzt mal das Skript durchgeblättert und dabei folgende wichtigen Sätze gefunden, zu denen man mehr sagen können sollte; die besonders wichtigen Resultate sind dabei mit (+) markiert:

- (+) Lebesgue'schen Differentiationssatz
- Überdeckungssatz von Vitali
- Differenzierbarkeit monotoner Funktionen auf dem Intervall
- (+) Charakterisierung absolutstetiger Funktionen (Theorem 2.7)
- (+) Satz von Rademacher
- Carathodory'sches Kriterium für Borel-Maße
- Steiner-Symmetrisierung, Isodiametrische Ungleichung und $\lambda_d = \mathcal{H}^d$ auf $\mathbb{R}^d$
- (+) grundlegende Dichteabschätungen für das Hausdorffmaß (Theorem 6.1)
- (+) Area-Formel
- Beschreibung von k-rektifizierbaren Mengen durch k-dimensionale ε-Lipschitz Graphen (Theorem 8.3)
- Regularität von k-rektifizierbaren Mengen (Theorem 8.4)
- (+) Existenz der Besicovitch Menge
- Lösung des Kakeya Problems
- (+) Brunn-Minkowski Ungleichung
- (+) Isoperimetriche Ungleichung mit Minkowski-Inhalt mit optimaler Konstante
- Morse-Sard Theorem (Theorem 10.5)
- (+) Isoperimetrische Ungleichung impliziert Sobolevungleichung (Theorem 10.7) mit derselben konstante
- Approximationssatz für BV
- (+) Co-Area Formel für BV
- Approximationssatz für Mengen von endlichem Perimeter

- (+) Isoperimetrische Ungleichung für Perimeter über Sobolevungleichung mit optimaler Konstante
- Relative isoperimetrische Ungleichung
- Kompaktheitssatz in BV mit Korollar zu Minimalflächen
- Besicovitch Überdeckungssatz und Korollar (im Vergleich mit Vitalis Überdeckungssatz)
- Eigenschaften vom reduzierten und maßtheoretischen Rand (insbesondere Dichteabschätzungen aus Lemma 12.9, Konvergenz zum Halbraum bei Blow-Up in Theorem 12.12, Rektifizierbarkeit in Theorem 12.14)
- (+) Divergenzsatz (Theorem 12.16)

Bei vielen der obigen Sätze erwarte ich neben der genauen Aussage höchstens eine grobe Beweisskizze. Es gibt aber auch Beispiele von einfacheren Sachen, bei denen ich durchaus nach einem Beweis fragen würde. Zum Beispiel:

- Fortsetzung von Lipschitz Funktionen
- $5r$-Überdeckung
- Abschätzung von Hausdorffmaß unter Lipschitz-Abbildung
- Unterhalbstetigkeit der Variation
- Poincaré-Ungleichung in BV
- Herleitung der glatten Co-Area Formel aus der BV Version

Schließlich noch ein Kommentar zu Kapitel 12. Abgesehen von Theorem 12.5, Lemma 12.9, Theorem 12.14 (b) und Theorem 12.16 habe ich in diesem Kapitel keine Beweise bereitgestellt, insbesondere nicht für Thoerem 12.12. Die Aussagen und Sätze im letzten Kapitel sind natürlich trotzdem wichtig, wobei ich hier auf exakte Beweise gut verzichten kann. Zudem wird in der Prüfung selbstverständlich nichts erwartet, was weder in der Vorlesung noch in der Übung behandelt wurde. Trotzdem ist zu beachten, dass für eine hervorragende Prüfungsleistung auch Transferleistungen eine Rollen spielen.

Aus meiner Sicht ist die isoperimerische Ungleichung für den Perimeter (und wegen Kapitel 12 für das Hausdorffmaß, siehe Theorem 12.14 (b)) das wohl wichtigste Resultat der Vorlesung. Viele der in der Vorlesung bewiesenen Resultate sind letztlich auch in unseren Beweis der isoperimetrischen Ungleichung eingegangen. Es erübrigt sich zu sagen, dass natürlich alle Definitionen wichtig sind, denn sonst kann man sich ja nicht unterhalten.

Übungsblätter

Die Übungen sind Vorlesungsinhalt, wobei allerdings Aufgaben mit Stern in der Regel nicht wesentlich sind. Im folgenden kommentiere ich die Übungsblätter mit den jeweiligen Übungsaufgaben. Hierbei heißt „kennen/wissen“ nur, dass man mit dem Resultat als solchem vertraut ist. Zudem beschreibe ich hier ein ideales Lernziel.

Blatt 1: Man sollte 1 (a), 2 und 3 als Fakten kennen, 4 wichtig.

Blatt 2: 1, 2 und 3 sollten bekannt sein. Ein Beweis von 1 sollte keine Hürde sein.

Blatt 3: Wie in 1 (c) sollte man ein Beispiel einer stetigen Funktion kennen, die nicht BV ist. 3 sollte klar sein.

Blatt 4: Man sollte wissen, dass das äußere Lebesguemaß Radon ist. 3 sagt, dass die Caratheodory Bedingung eine Äquivalenz ist.

Blatt 5: 1 sollte klar sein, 2 und 3 sind wichtig

Blatt 6: Die Messbarkeitsaussage aus 3 sollte bekannt sein. 4 ist wichtig.

Blatt 7: 4 ist wichtig.

Blatt 8: 1 sollte klar sein (von der Subtilität beim nicht σ-endlichen Fall in (d) abgesehen). 2 und 3 (b) sollten bekannt sein, 3 (a) ist wichtig.

Blatt 9: 1 und 2 sind wichtig.

Blatt 10: Man sollte nach 1 wissen, dass der approximative Tangentialraum mit unserer Definition unter Umständen mehr als ein Element enthalten kann. Man sollte wissen, dass es ein eindeutiges unter orthogonalen Abbildungen invariantes Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{G}(d,k)$ gibt.

Blatt 11: 2 (a) wichtig, 3 sollte bekannt sein.

Blatt 12: 1 und 2 (a) sollten klar sein, 2 (b) sollte bekannt sein.

Blatt 13: 1 und 4* sollten bekannt sein; 3 ist wichtig.

Blatt 14: 1, 2, 4* sollten bekannt sein; 3 ist wichtig.

Blatt 15: 1 und 3 sollten bekannt sein; 2 ist wichtig.