



---

## Übungen zur Maßtheorie: Blatt 1

---

Does anyone believe that the difference between the Lebesgue and Riemann integrals can have physical significance, and that whether say, an airplane would or would not fly could depend on this difference? If such were claimed, I should not care to fly in that plane.

— Richard Wesley Hamming (1915–1998)

Bitte im Moodle zur Vorlesung anmelden. Die Übungspunkte werden dort verwaltet. Vorleistung zur Teilnahme an der Klausur sind das Erreichen von 50% der Übungspunkte.

Die Lösungen der Übungsblätter sind jeweils wöchentlich immer vor Beginn der Übungsveranstaltung abzugeben. Dort erhält man auch die korrigierten Lösungen der vorigen Woche zurück. In der Übungsveranstaltung wird eine Lösung der Übungsaufgaben präsentiert. Bei der Maßtheorie handelt es sich um eine 2+1 SWS Vorlesung. Zur Besprechung der Übungsaufgaben wird also in der Regel eine Stunde ausreichen.

Die Übungsblätter dürfen aktuell zu zweit oder auch einzeln abgegeben werden. Abgabe zu zweit ist bevorzugt. Die abgegebenen Blätter müssen ordentlich geheftet und leserlich mit den entsprechenden Namen versehen sein (Schreibung wie im Moodle). Kontrolliert bitte regelmäßig, dass Eure Übungspunkte korrekt im Moodle eingetragen wurden!

1. Sei  $\Omega = \{1, \dots, 8\}$ . Zeigen Sie, dass es einen Erzeuger der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{P}(\Omega)$  gibt, welcher nur 3 Elemente hat. (3)

2. Zeige, dass die Borel  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}$  bereits durch (7)

$$\mathcal{E} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\}$$

erzeugt wird.

Gib ohne Nachweis ein Beispiel eines abzählbaren Erzeugers von  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  an.

3. Sei  $d$  die diskrete Metrik auf  $\mathbb{R}$ ; also  $d(x, y) = 1$  falls  $x \neq y$  und  $d(x, y) = 0$  falls  $x = y$ , für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Bestimme die Borel  $\sigma$ -Algebra von  $(\mathbb{R}, d)$ . Zeige, dass diese  $\sigma$ -Algebra nicht von der Familie der offenen Bälle (5)

$$\mathcal{F} := \{\{y \in \mathbb{R} : d(x, y) < r\} : x \in \mathbb{R} \text{ und } r > 0\}$$

erzeugt wird.

*Hinweis:* Beispiel 1.3 (c) aus dem Skript vom WS 2014/2015 kann hier nützlich sein.