Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 23.11.16
Gesamtpunktzahl: 15+5*

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 5

> At a purely formal level, one could call probability theory the study of measure spaces with total measure one, but that would be like calling number theory the study of strings of digits which terminate.
>
> — Terence Tao

1. Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) zwei messbare Räume. Eine Funktion $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt *messbar* (genauer Σ_1/Σ_2-messbar), falls $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ für alle $A \in \Sigma_2$.

(a) Sei $\mathcal{E} \subset \Sigma_2$ ein Erzeuger der σ-Algebra Σ_2. Zeige, dass f genau dann messbar ist, wenn $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ für alle $A \in \mathcal{E}$. (3)

(b) Seien (Ω_1, d_1) und (Ω_2, d_2) zudem metrische Räume derart, dass $\Sigma_1 = \mathscr{B}(\Omega_1)$ und $\Sigma_2 = \mathscr{B}(\Omega_2)$. Zeige, dass jede stetige Funktion $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ messbar ist. (1)

(c) Es seien $(\Omega_1, \Sigma_1) = (\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ und $(\Omega_2, \Sigma_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Zeige, dass $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ genau dann messbar ist, wenn es konstant ist. (2)

2. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

(a) Sei $\mathscr{N}$ die Menge aller Nullmengen von (Ω, Σ, μ), also (3)

$$\mathscr{N} = \{B \subset \Omega : B \subset A \text{ für ein } A \in \Sigma \text{ mit } \mu(A) = 0\}.$$

Setze $\widetilde{\Sigma} := \{B \subset \Omega : A \in \Sigma, A \triangle B \in \mathscr{N}\}$. Zeige, dass $(\Omega, \widetilde{\Sigma})$ ein messbarer Raum ist.

(b) Sei $\widetilde{\mu}\colon \widetilde{\Sigma} \to [0, \infty]$ gegeben durch $\widetilde{\mu}(B) := \mu(A)$ für alle $B \subset \Omega$ und $A \in \Sigma$ mit $A \triangle B \in \mathscr{N}$. Zeige, dass $\widetilde{\mu}$ wohldefiniert und $(\Omega, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ ein Maßraum ist. (3)

Dieser Maßraum ist die *Vervollständigung* von (Ω, Σ, μ). Beachte, dass die Vervollständigung dieselben Nullmengen hat wie der ursprüngliche Maßraum, in der Vervollständigung aber alle Nullmengen messbar sind.

(c) Wir betrachten nun die Vervollständigung $(\mathbb{R}^d, \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d), \widetilde{\lambda})$ von $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Die Elemente von $\widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^d)$ sind die *Lebesgue messbaren* Mengen in $\mathbb{R}^d$. (3)

Zeige, dass $A \subset \mathbb{R}^d$ genau dann Lebesgue messbar ist, wenn es eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von in A enthaltenen Kompakta gibt derart, dass $A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ eine Nullmenge ist.

Hinweis: Verwende Blatt 4, Aufgabe 3 (b).

3. Wir verwenden die Notation aus Beispiel 3.4, wo die Cantormenge C konstruiert wird. Für $x \in C$ seien $x_k \in \{0, 2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$.

(a) Zeige, dass es eine eindeutige monotone Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, welche an $x \in C$ den Wert $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2} 2^{-k}$ hat. (3*)

Weise nach, dass f auf jedem Intervall in $[0,1] \setminus C$ konstant ist, f stetig und fast überall differenzierbar mit Ableitung 0 ist und $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $\lambda(f(C)) = 1$ gilt.

(b) Zeige, dass es eine Lebesgue messbare Menge gibt, die nicht Borel messbar ist. (2*)

Dazu setzen wir folgende nichttriviale Aussage als bereits bekannt voraus: Jede Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $\lambda(A) > 0$ enthält eine nicht Lebesgue messbare Teilmenge.

Hinweis: Betrachte die strikt monotone und bistetige Funktion $g\colon [0,1] \to [0,2]$ gegeben durch $g(x) = x + f(x)$ und verwende $\lambda(g(C)) > 0$.