Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 30.11.16
Gesamtpunktzahl: 15+5*

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Wintersemester 2016/2017

Übungen zur Maßtheorie: Blatt 6

The theory of probability as a mathematical discipline can and should be developed from axioms in exactly the same way as geometry and algebra.

— Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903–1987)

1. Wir versehen in dieser Aufgabe $\mathbb{R}$ immer mit der Borel σ-Algebra.

(a) Gib ein Beispiel einer nicht messbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an. (1)

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass dann f' messbar ist. (2)

(c) Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und (f_n) sei eine Folge messbarer Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass dann $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch (3)

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{falls dieser Grenzwert (eigentlich) existiert,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

messbar ist.

2. Sei Ω_1 eine Menge und (Ω_2, Σ_2) ein messbarer Raum. Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von Funktionen von Ω_1 nach Ω_2. Dann ist klar, dass es eine (bezüglich der Mengeninklusion) kleinste σ-Algebra Σ_1 auf Ω_1 gibt, welche alle Funktionen in $\mathscr{F}$ Σ_1/Σ_2-messbar macht.

Wir schreiben dann auch $\sigma(\mathscr{F})$ für die von $\mathscr{F}$ auf Ω_1 erzeugte σ-Algebra Σ_1.

Im folgenden sei $\Omega_1 = [0,1)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := (-1)^{k+1}$ falls $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ und $x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$.

(a) Zeige, dass $\sigma(\{f_n : n \in \mathbb{N}\}) = \mathscr{B}([0,1))$. (3)

(b) Wir betrachten das Lebesguemaß λ auf $\mathscr{B}([0,1))$. Es sei (α_n) eine Folge in $\{-1,1\}$ und $M \in \mathbb{N}_0$. Zudem sei $J \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit M Elementen. (3)
Bestimme $\lambda(\{x \in [0,1) : f_n(x) = \alpha_n \text{ für alle } n \in J\})$.

Begründe damit, in welchem Sinn die Kenntnis von $f_1(x), \dots, f_N(x)$ für ein unbekanntes aber festes $x \in [0,1)$ uns keine Information zu den Werten von $f_{N+1}(x), \dots, f_M(x)$ liefert, wobei $N, M \in \mathbb{N}_0$ mit $N < M$.

3. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig derart, dass f jede Lebesgue Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ auf eine Lebesgue Nullmenge in $\mathbb{R}^m$ abbildet. Zeige: Für alle $A \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$ gilt $f(A) \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^m)$. (3)

Gilt diese Aussage auch ohne die Forderung, dass f Nullmengen auf Nullmengen abbildet?

4. (a) Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $\lambda(K) > 0$. Zeige, dass dann $K - K = \{a - b : a, b \in K\}$ ein nichttriviales Intervall enthält. (2*)

Hinweis: Es gibt $U \subset \mathbb{R}$ offen mit $K \subset U$ und $\lambda(U) < 2\lambda(K)$. Gilt dann nicht für alle x mit kleinem Betrag, dass $\lambda((K + x) \cap K) > 0$?

(b) Zeige: Jedes $A \in \widetilde{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ mit $\tilde{\lambda}(A) > 0$ enthält eine nicht Lebesgue messbare Teilmenge. (3*)

Hinweis: Sei E die nicht Lebesgue messbare Menge aus Beispiel 2.3 und der Bemerkung zu Satz 3.10. Verwende nun (a) und $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(q + E)$.